



Pour obtenir des images médicales, certains techniques utilisent des méthodes mathématiques quelque peu sophistiquées.
L'objectif de ce petit exposé est d'en expliquer très simplement le principe.

Et c'est quoi la tomographie ?

C'est voir à l'intérieur sans avoir à découper



Pour faire savant :
« sans avoir à
découper » = « de
façon non invasive »

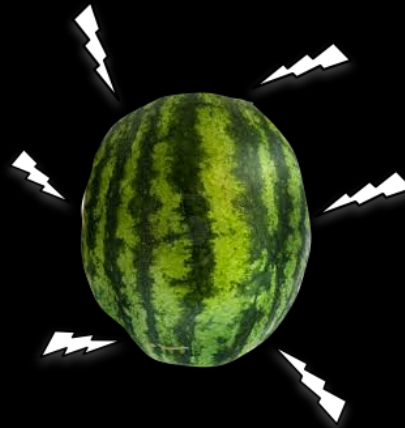
Là, vous voyez, c'est
plutôt invasif pour
voir ce qu'il y a dans
la pastèque

Imaginez que la
pastèque est un
cerveau... C'est moyen
comme méthode, pour
explorer le cerveau

Certaines de ces méthodes relèvent de la tomographie. Ce sont ces méthodes que nous allons explorer.

Le principe

Voir dans l'objet sans avoir à le découper
en détectant du signal émis par l'objet



Allo pastèque, je
suis à l'écoute !



Le principe consiste à déterminer ce qu'il y a à l'intérieur d'un objet uniquement à partir de mesures réalisées à l'extérieur de l'objet. Dans le cas de la tomographie dite « par émission », c'est le signal émis par l'objet que nous allons utiliser pour révéler l'intérieur de l'objet.

Le principe

Le signal, chez l'homme, ce sont des émissions radioactives mesurables après avoir injecté un radiotracteur

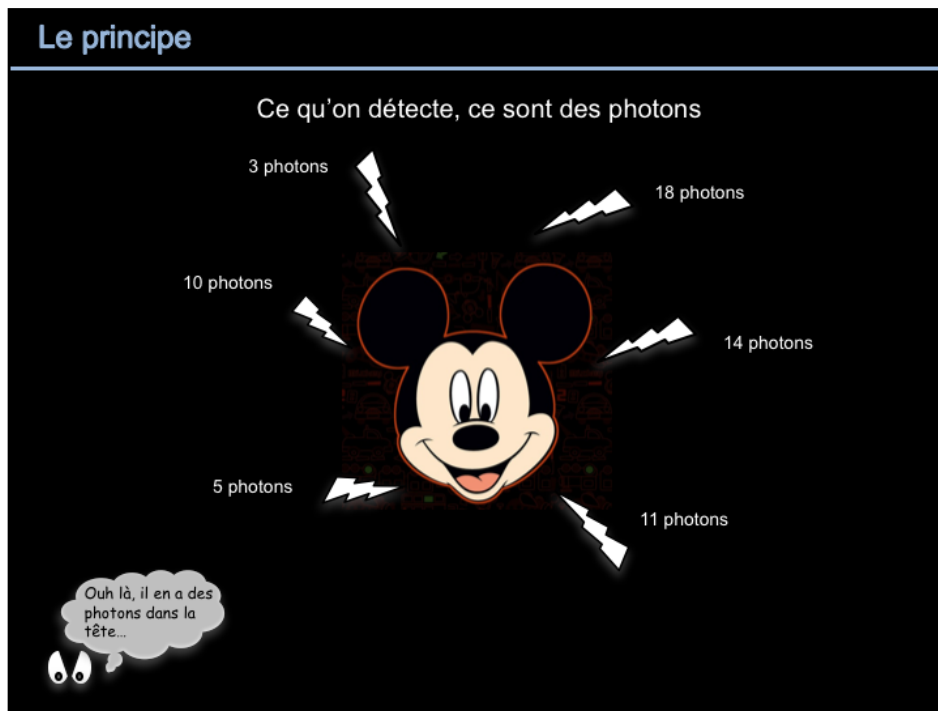
Là, il faut que vous ayez lu le 1^{er} tome sur l'espionnage...



Euh Mickey, au passage, c'est pas un homme...

Dans le cas de la tomographie d'émission utilisée en imagerie médicale, le signal émis provient d'une solution radioactive administrée au patient (sans danger aucun tant elle est administrée en petite quantité). Cette solution s'appelle un radiotracteur. Elle permet de visualiser le fonctionnement des organes. A ce stade, si vous êtes déjà perdu, référez vous au document concernant les molécules espionnes qui se trouve sur mon site (www.guillemet.org/irene/vulgarisation).

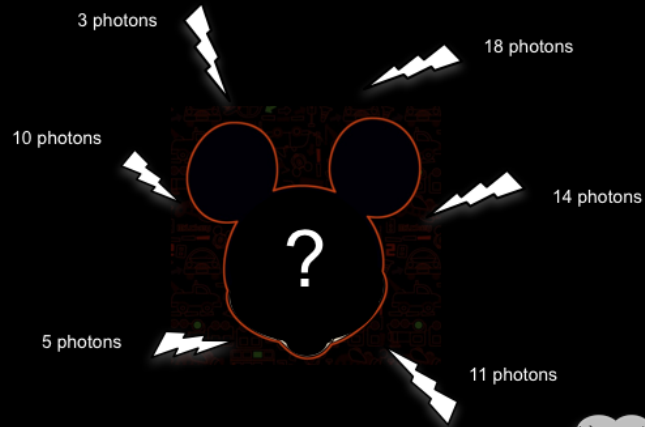
Le principe



Ce radiotraceur conduit à l'émission de photons, c'est à dire des particules de lumière. Un détecteur va donc détecter des photons tout autour du patient examiné, ici sa tête. Il s'agit alors de déterminer la répartition du radiotraceur dans la tête à partir des ces photons détectés.

Le problème

Trouver le signal présent dans la tête à partir de ce qu'il en sort

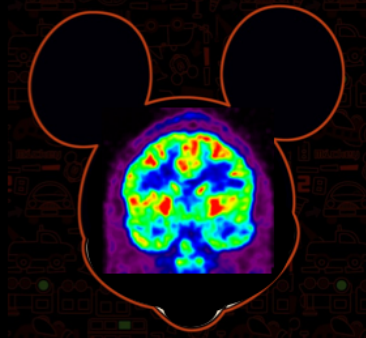


Là, pas simple de savoir ce que Walt Disney a dessiné dans la tête de Mickey...

On peut donc représenter le problème ainsi.

Le problème

Et représenter ce signal sous forme d'images



C'est joli en fait
dans la tête de
Mickey...

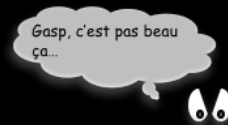


La répartition du radiotracteur dans l'organisme va être décrite par des images, ou plus exactement par une image tridimensionnelle, c'est-à-dire spécifiant la concentration du traceur dans en chaque point de l'espace (ici, de la tête).

Au fait, c'est quoi une image ?

Une image est un tableau de nombres ...

5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	3	3	3	3	5	5
5	3	2	3	3	2	3	5
5	3	3	3	3	3	3	5
5	3	1	3	3	1	3	5
5	3	3	1	1	3	3	5
5	3	3	3	3	3	3	5
5	5	5	5	5	5	5	5



Pour comprendre les techniques de tomographie, il faut se souvenir qu'une image n'est autre qu'un tableau de nombres.

Des nombres à l'image

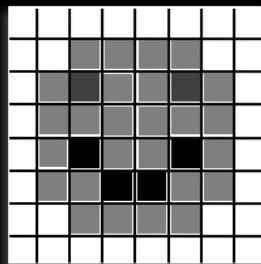
où à chaque nombre, correspond une couleur

5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	3	3	3	3	5	5
5	3	2	3	3	2	3	5
5	3	3	3	3	3	3	5
5	3	1	3	3	1	3	5
5	3	3	1	1	3	3	5
5	3	3	3	3	3	3	5
5	5	5	5	5	5	5	5

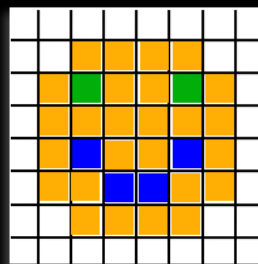
Tout s'éclaire ! Il est pas beau le smiley ?



- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

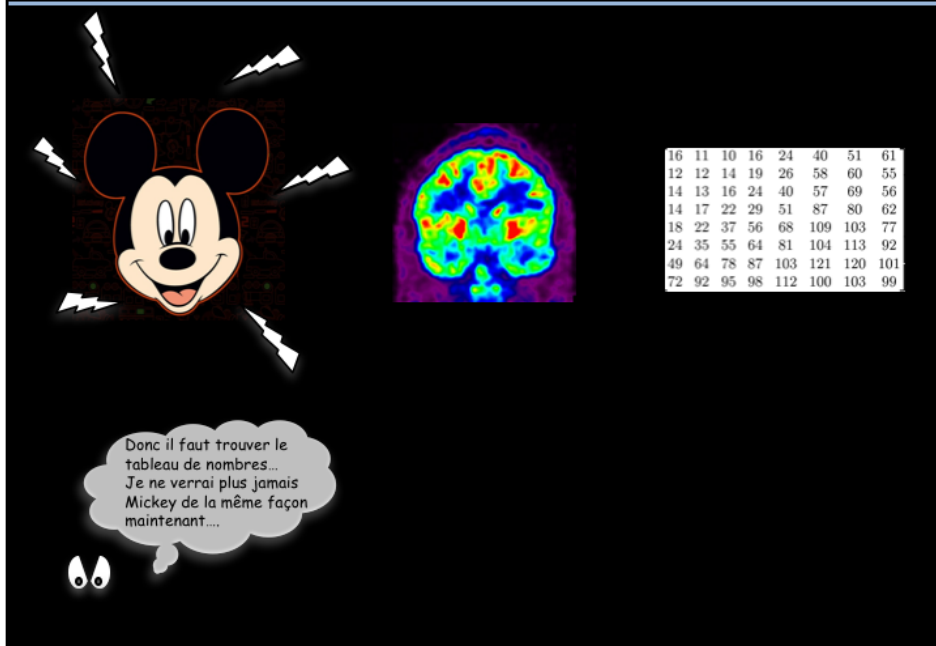


- 1
- 2
- 3
- 4
- 5



Si chaque nombre est représenté par une couleur, suivant un code qu'on appelle une échelle de couleurs, on perçoit une image. Ici, j'ai représenté deux images correspondant au même tableau de nombres, qui correspondent à deux échelles de couleur différentes.

On récapitule



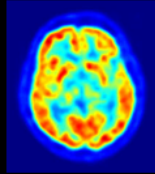
The slide features Mickey Mouse on the left, a brain scan image in the center, and a table of numbers on the right. Mickey Mouse has a speech bubble that says: "Donc il faut trouver le tableau de nombres... Je ne verrai plus jamais Mickey de la même façon maintenant...".

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

Donc pour résumer, la tomographie d'émission consiste à estimer la répartition d'un signal dans un objet, ici la répartition d'un radiotracteur administré au patient, à partir des photons détectés à l'extérieur du patient. Cette répartition va être représenté sous la forme d'image, sachant qu'une image est un tableau de nombres. Il va donc s'agir d'estimer le tableau de nombres qui a donné naissance aux signaux mesurés à l'extérieur du sujet.

On simplifie

Regardons une tranche du cerveau de Mickey



16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

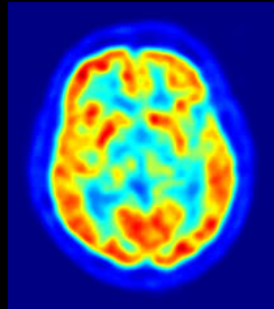


Si Mickey savait qu'on
compare sa tête à
une pastèque...



Pour décrire le principe de la reconstruction tomographique, il est pratique de simplifier un peu le problème. Nous allons considérer uniquement une coupe à travers la tête et tenter de comprendre comment on peut estimer l'image de cette coupe, c'est à dire le tableau de nombres qui décrit le signal présent dans cette coupe.

Lien entre l'image et ce qu'on détecte



16	11	10	16	24	40	51	61	= 229
12	12	14	19	26	58	60	55	= 256
14	13	16	24	40	57	69	56	= 289
14	17	22	29	51	87	80	62	
18	22	37	56	68	109	103	77	
24	35	55	64	81	104	113	92	
49	64	78	87	103	121	120	101	
72	92	95	98	112	100	103	99	
=219	=266						

Au secours, il faut faire des calculs !



Pour cela, il faut établir le lien entre le signal qu'on détecte, et le signal dans la coupe. En mathématique, c'est ce qu'on appelle le « problème direct ». Dans le cas de la tomographie d'émission, ce lien est simple. Les mesures externes sont la somme des valeurs présentes dans chaque élément de l'image suivant les directions dites « de projection », ici figurées par les lignes orange.

PS : en fait, c'est un peu moins simple que ça, mais pour le propos, nous allons faire cette simplification.

En pratique

= 229
= 256
= 289
=219 =266

? =

Hum, je vois...
Euh, en fait, je vois
rien du tout...

En pratique, nous allons donc devoir déterminer les valeurs dans l'images telles que leurs sommes en ligne et en colonne soient identiques aux valeurs mesurées. On parle de résolution du « problème inverse » : retrouver le signal qui a conduit aux mesures lorsqu'on dispose des mesures.

Encore plus simple

Que faut-il mettre dans l'image pour mesurer les valeurs observées ?

		6	4
			2
			8

Merci, c'est plus simple comme ça. En fait, pas tant que ça...

Il existe de très nombreuses méthodes pour résoudre ce problème inverse. Pour pouvoir faire les calculs à la main, nous allons considérer une image composée de 4 valeurs seulement. Pour cette image, nous mesurons les valeurs indiquées en blanc. La question est de déterminer les 4 valeurs à mettre dans l'image pour qu'elles conduisent aux valeurs mesurées en blanc, en effectuant les sommes en ligne et en colonne. Je vous assure que c'est plus facile qu'un Sudoku !

La solution

	6	4	
	1	1	2
	5	3	8

C'était pourtant simple !

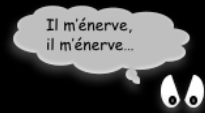


Voilà un résultat possible : la somme des uns sur la première ligne fait bien 2. Cinq plus trois égal 8. En colonne, $1+5=6$, et $1+3=4$.

Un autre ?

Que faut-il mettre dans l'image pour mesurer les valeurs observées ?

6	4	
		7
		3



Pour de si petites images, on peut trouver la solution de tête. Comme ici.

Et la solution

	6	4	
4	3	7	
2	1	3	



C'est très facile.

Un autre ?

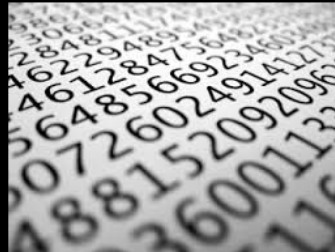
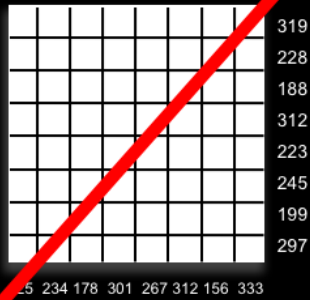
										319
										228
										188
										312
										223
										245
										199
										297
125	234	178	301	267	312	156	333			



Allez y ...

En pratique

Les images ont typiquement 256 lignes et 256 colonnes

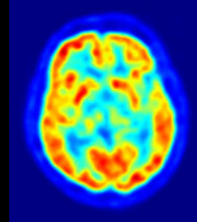
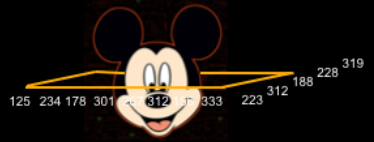


Assez rigolé,
passons aux choses
sérieuses



Il est aisé de comprendre que pour des grandes images, il faut s'aider d'un algorithme.

Donc il faut un algorithme



```

35  p ← f0_minmax(power)
36  end if
37  for all q ∈ N(p) do      (* labelling p by inspecting neighbours *)
38  if dist(p, q) < curdist and dist(p) > f0_dist(q) = true then
39  (* q belongs to an existing basin or to watershed *)
40  if dist(p) < curdist
41  dist(p) ← curdist
42  else if dist(p) < dist(q) then
43  dist(p) ← dist(q)
44  end if
45  else if dist(p) = curdist then
46  dist(p) ← curdist
47  end if
48  else if dist(p) = curdist and dist(q) = 0 then      (* q is pit/min point *)
49  dist(p) ← curdist + 1; f0_add(q, power)
50  end if
51  end for
52  end loop
53  (* doesn't need power any more, as level is *)
54  for all q ∈ q with dist(q) = 0 do
55  dist(q) ← 0      (* reset distance to zero *)
56  if dist(q) = curdist then      (* q is inside a new minimum *)
57  curdist ← curdist + 1;      (* update new label *)
58  f0_add(q, power); dist(q) ← curdist
59  while not f0_empty(power) do
60  n ← f0_minmax(power)
61  for all r ∈ N(n) do      (* inspect neighbours of q *)
62  if dist(r) < curdist then
63  f0_add(r, power); dist(r) ← curdist
64  end if
65  end while
66  end if
67  end for
68  end for

```

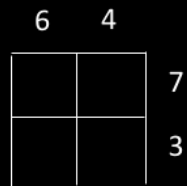
Oh la triche !



Cet algorithme va donner, de manière déterministe, l'image qui correspond aux mesures.

Un algorithme simple : ART

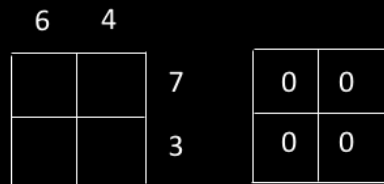
Arithmetic Reconstruction Technique



Il existe de très nombreux algorithmes dits de reconstruction tomographique. Pour vous en faire saisir le principe, nous allons utiliser la technique de reconstruction arithmétique appelée ART.

Un algorithme simple : ART

Arithmetic Reconstruction Technique



Dans cette technique, on se donne au départ une image arbitraire. Ici, je prends une image dans laquelle je mets des zéros dans chaque élément.

Un algorithme simple : ART

Arithmetic Reconstruction Technique

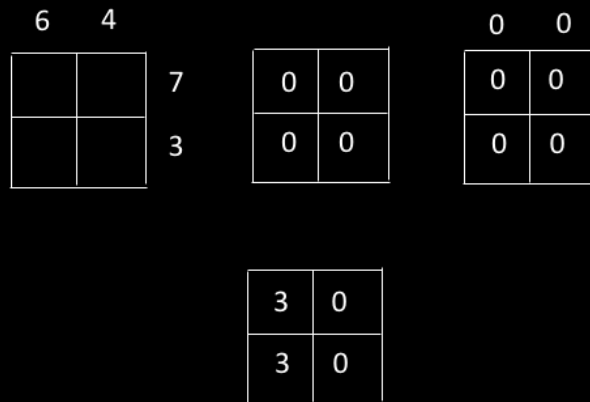
6	4					
		7	0	0	0	0
		3	0	0	0	0



Ensuite, nous allons déterminer quelles mesures nous aurions obtenues à partir de cette image, en utilisant la modélisation du problème direct. Donc ici, nous faisons la somme, en commençant par les colonnes. En colonnes, au lieu de 6 et 4, nous obtenons 0 et 0. Ceci signifie que les valeurs 0 que nous avons mises sont trop petites et que nous avons sous estimés le signal présent dans l'image.

Un algorithme simple : ART

Arithmetic Reconstruction Technique



Du grand ART!

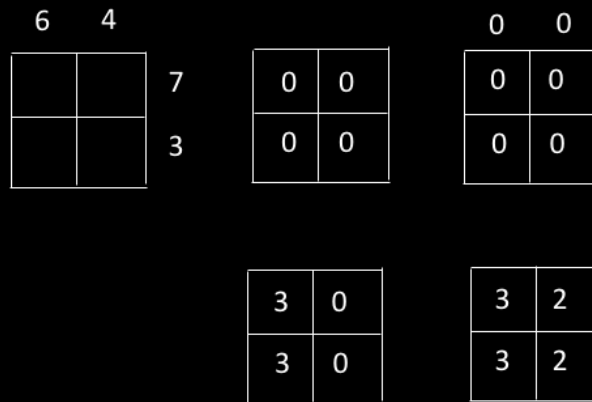


Prenons la première colonne. Il faut obtenir 6 en sommant ses 2 valeurs. On pourrait mettre 0 et 6, 1 et 5, ou 2 et 4, ou 3 et 3, ou 4 et 2, ou 5 et 1, ou 6 et 0. Comme on ne sait pas d'où vient le signal, on met la solution qui ne privilégie aucune des cases, donc on met 3 dans chacune des 2 cases. Ainsi, la somme pour cette première colonne fait bien 6.

Et on procède de la même façon pour la 2^{ème} colonne.

Un algorithme simple : ART

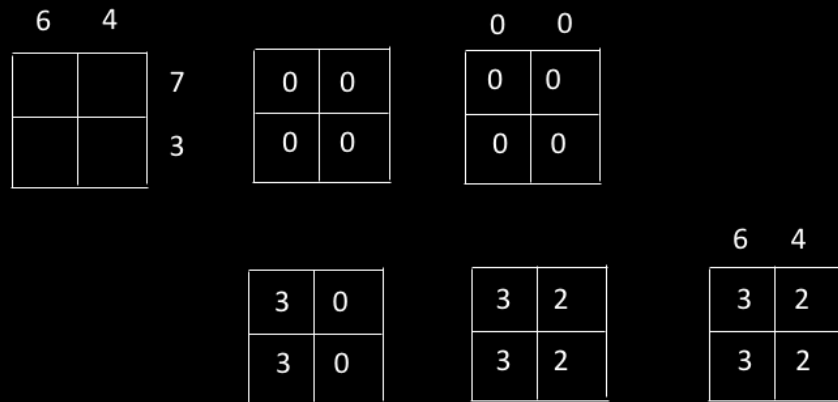
Arithmetic Reconstruction Technique



Ainsi, on va mettre 2 dans chacune des 2 cases, car $2+2=4$ qui est bien la somme qu'il faut trouver dans la 2^{ème} colonne.

Un algorithme simple : ART

Arithmetic Reconstruction Technique



Du grand ART!

Ceci étant fait, nous avons dans l'image des valeurs qui reproduisent parfaitement les mesures faites en colonnes. Regardons maintenant les lignes.

Un algorithme simple : ART

Arithmetic Reconstruction Technique : on continue

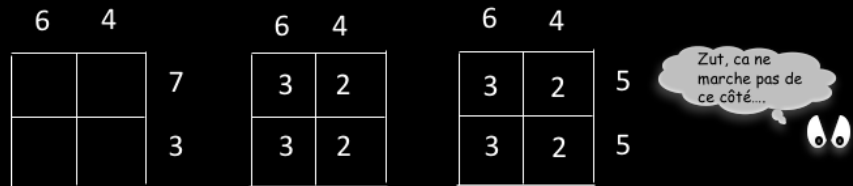
6	4				
				7	
				3	

6	4				
		3	2		
		3	2		

Nous effectuons la somme des deux valeurs de la première ligne, puis la somme des 2 valeurs de la 2^{ème} ligne.

Un algorithme simple : ART

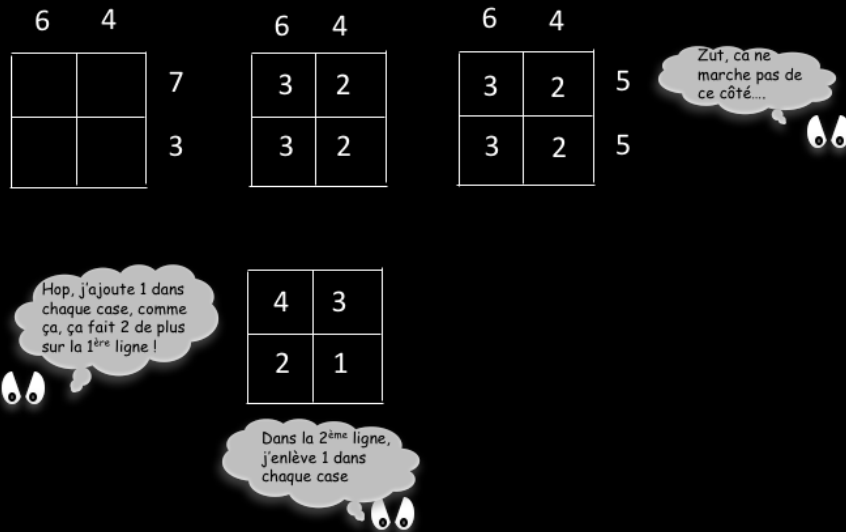
Arithmetic Reconstruction Technique : on continue



Nous obtenons ainsi la valeur de 5 pour chacune des 2 lignes. Manque de chance, il fallait obtenir 7 sur la première ligne, et 3 sur la seconde.

Un algorithme simple : ART

Arithmetic Reconstruction Technique : on continue



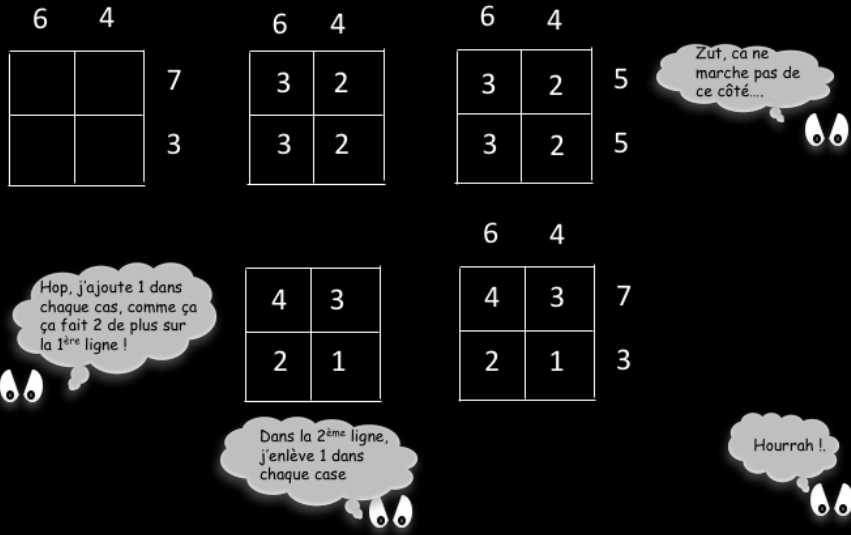
Ce qui signifie que sur la 1^{ère} ligne, nous avons sous-estimé le signal de 2 unités. Comment les ajouter : on pourrait ajouter 2 dans la 1^{ère} case et rien dans la 2^{ème}, ou 2 dans chacune des 2 cases, ou rien dans la 1^{ère} et 2 dans la 2^{ème}.

Comme on ne sait pas, on choisit toujours la solution qui ne privilégie aucune case : on va mettre 1 dans chacune des 2 cas.

Sur la 2^{ème} ligne, même stratégie, mais là, on a un excès de 2 unités, car on a mesuré 5 alors qu'on aurait du mesurer 3. Donc il faut enlever 2 unités en tout sur la ligne. On va donc enlever 1 de chaque case.

Un algorithme simple : ART

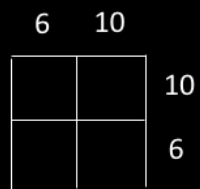
Arithmetic Reconstruction Technique : on continue



Et maintenant, on recommence en repartant des colonnes. Et miracle (enfin pas tout à fait), ça fonctionne : $4+2=6$ et $3+1=4$. Donc on a trouvé la solution ! On s'arrête là.

Compris ?

A vous !



La démarche est donc extrêmement simple : essayez !

Compris ?

Une solution

6	10	
		10
		6

6	10	
4	6	10
2	4	6

Bon, maintenant, je
vais enfin savoir ce
qu'il y a dans la fête
de Mickey !



Ici, voici une solution. Vous en avez trouvé une autre. C'est possible. En fait souvent, il y a plusieurs solutions.

Compris ?

Et une autre solution...

6	10	
		10
		6

6	10	
4	6	10
2	4	6

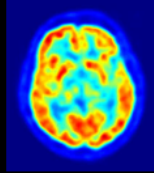
6	10	
3	7	10
3	3	6



Voici par exemple une autre solution.

Et c'est pour ça que les chercheurs cherchent...

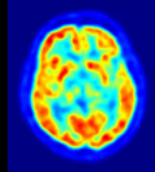
Trouver l'algorithme qui donne la bonne image



Trouver la bonne solution parmi toutes les solutions possibles est un problème non parfaitement résolu, et qui occupe encore aujourd'hui une grande communauté de chercheurs.

Et c'est pour ça que les chercheurs cherchent...

Trouver l'algorithme qui donne la bonne image



Hum,
plausible !

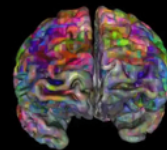
Là, je crois
qu'il a un
problème...

En particulier, pour identifier la bonne solution parmi toutes les solutions possibles, on peut estimer ce qu'on appelle la « vraisemblance » d'une image. Par exemple ici, à droite, si on est dans le contexte d'un examen cérébral, on peut s'apercevoir que la solution correspondant au tableau de Miro est quand même peu vraisemblable. On va donc concevoir des algorithmes qui vont permettre d'écartier une telle solution car elle aura une faible vraisemblance dans notre contexte.

Les techniques qui permettent de favoriser certaines solutions ou d'en pénaliser d'autres rentrent dans la catégorie des techniques dites de régularisation.

Et pour finir

Tout ça est fait en 3D...



J'espère que vous avez ainsi compris le principe de la reconstruction tomographique. En pratique, c'est un tantinet plus compliqué, car j'ai utilisé beaucoup de simplifications dans cet exposé. En particulier, on estime des images tridimensionnelles, ce qui rend les choses plus complexes, notamment pour définir le problème direct.

En outre, la définition du problème direct que j'ai utilisée ici est simpliste. En pratique, les photons interagissent avec la matière qu'ils traversent donc le modèle direct est décrit par des équations plus complexes qu'une somme. Enfin, les mesures ne sont pas parfaites, donc le plus souvent, il n'y a pas de solution du tout. Il faut donc trouver la solution la plus probable, mais qui reste une solution approximative.

Encore plus fort !

Et sur le corps entier ...



Waouh, on voit tout l'intérieur !



En médecine, ces techniques sont aussi utilisées pour des examens dits « corps entier », qui permettent d'examiner la totalité de l'intérieur de l'organisme de façon non invasive. Ces techniques, tout comme l'imagerie médicale, sont en plein essor compte tenu du nombre de mécanismes impliqués dans le fonctionnement de l'organisme que nous parvenons désormais à visualiser.



Pour conclure, et comme illustré dans cet exposé, l'imagerie médicale est donc une discipline hautement pluridisciplinaire, qui fait appel non seulement à la physique pour la conception des instruments d'imagerie, mais aussi aux mathématiques pour la construction des images à partir des signaux délivrés par les instruments. La chimie, la biologie, et la physiologie ne sont pas en reste, mais feront l'objet d'autres exposés.