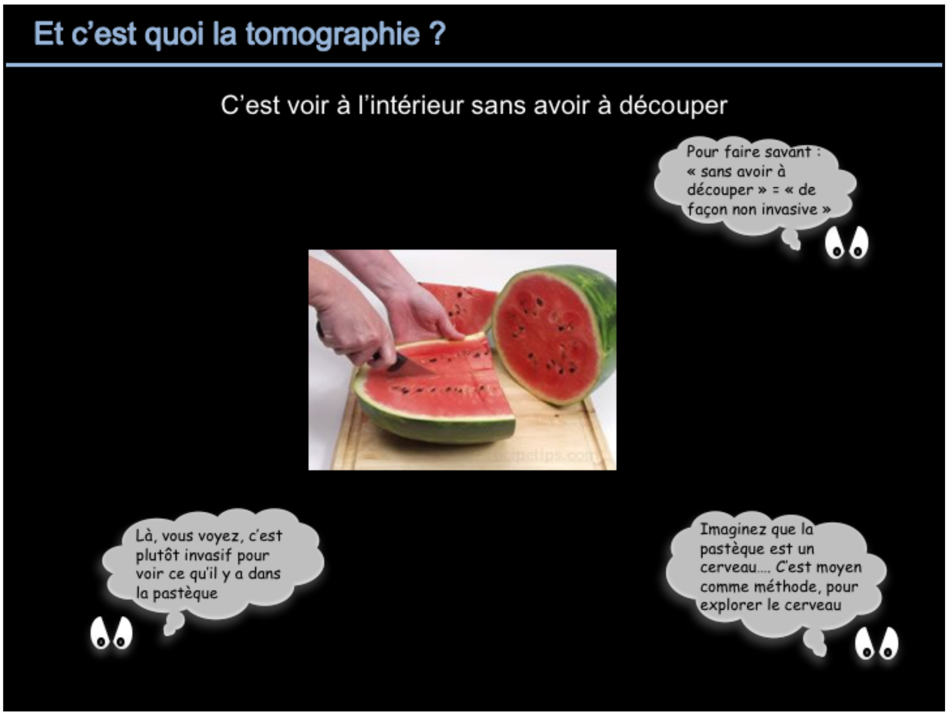
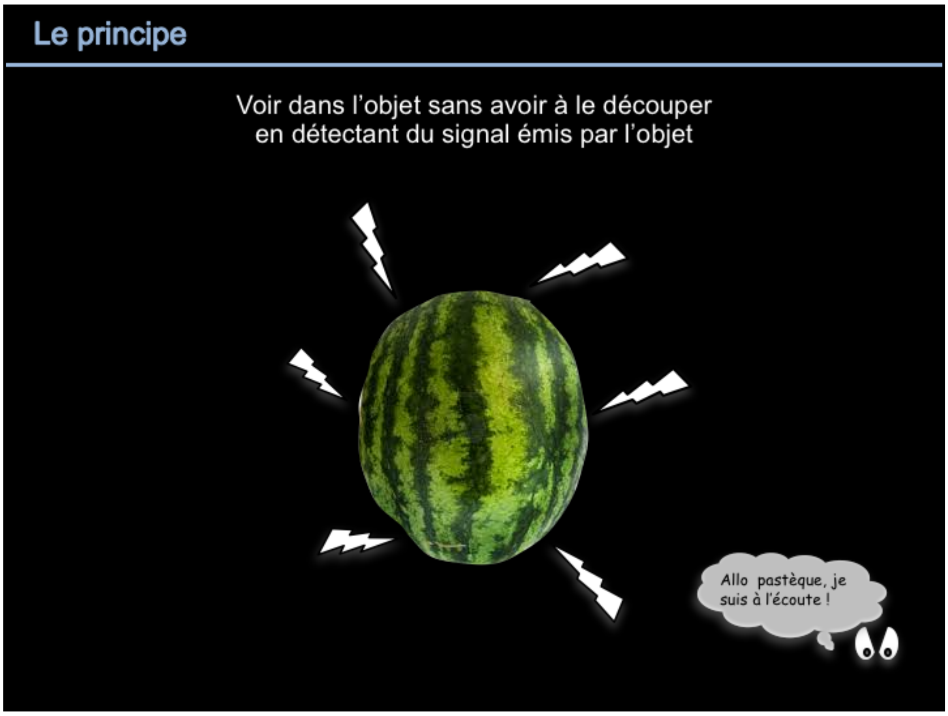
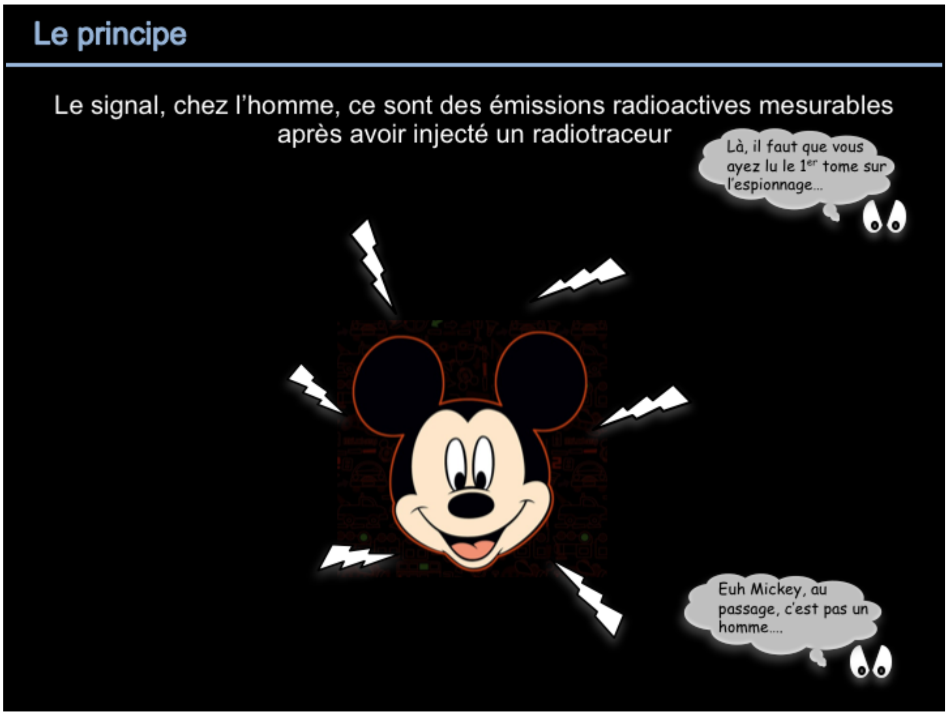
Pour obtenir des images médicales, certains techniques utilisent des méthodes mathématiques quelque peu sophistiquées.
L'objectif de ce petit exposé est d'en expliquer très simplement le principe.



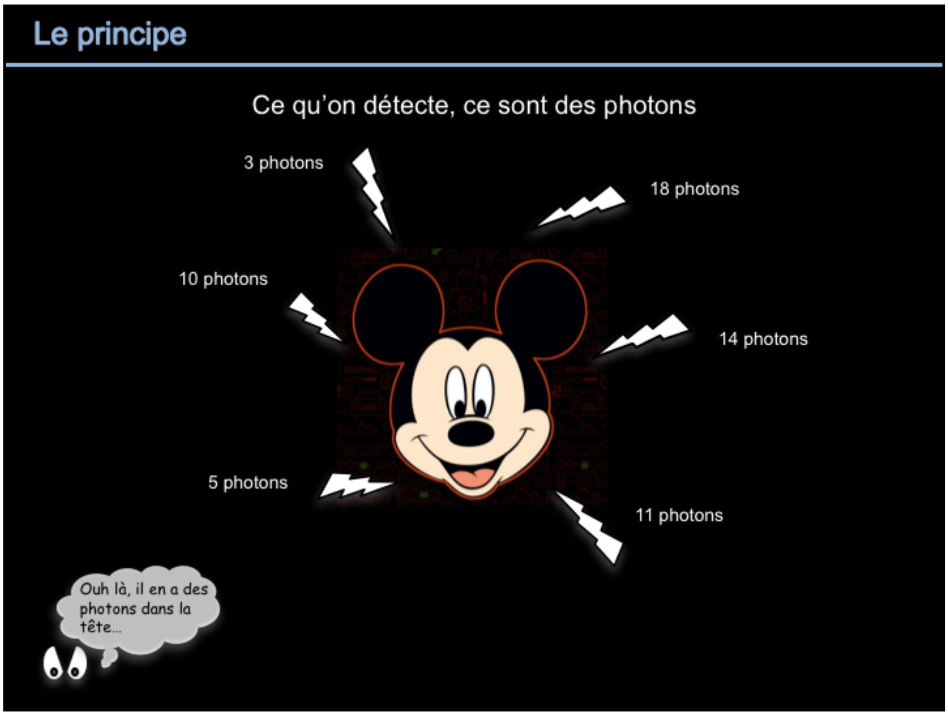
Certaines de ces méthodes relèvent de la tomographie. Ce sont ces méthodes que nous allons explorer.



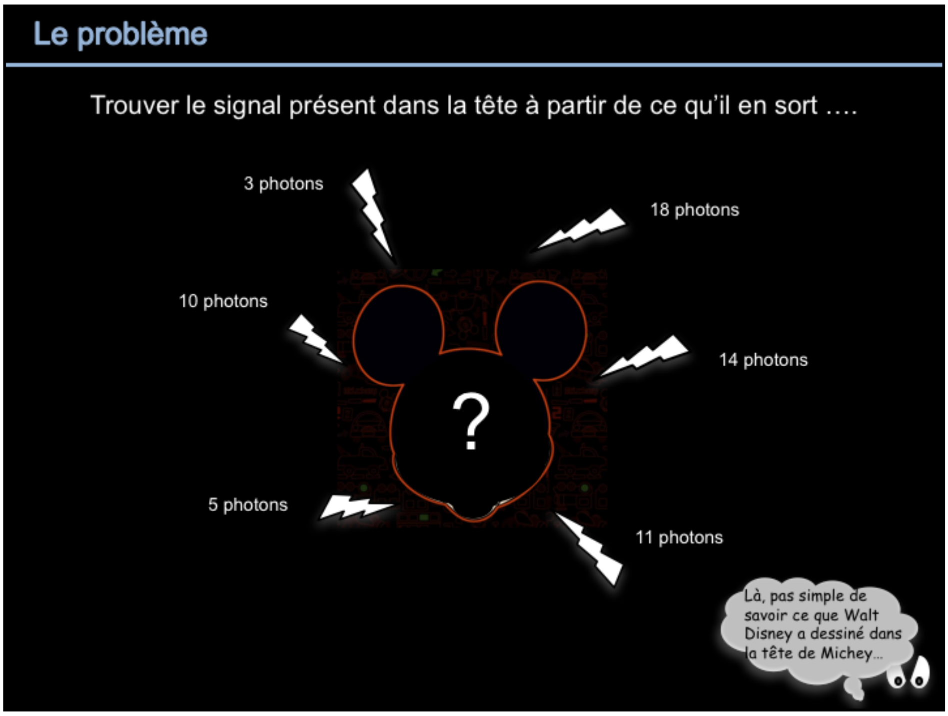
Le principe consiste à déterminer ce qu'il y a à l'intérieur d'un objet uniquement à partir de mesures réalisées à l'extérieur de l'objet.
Dans le cas de la tomographie dite « par émission », c'est le signal émis par l'objet que nous allons utiliser pour révéler l'intérieur de l'objet.



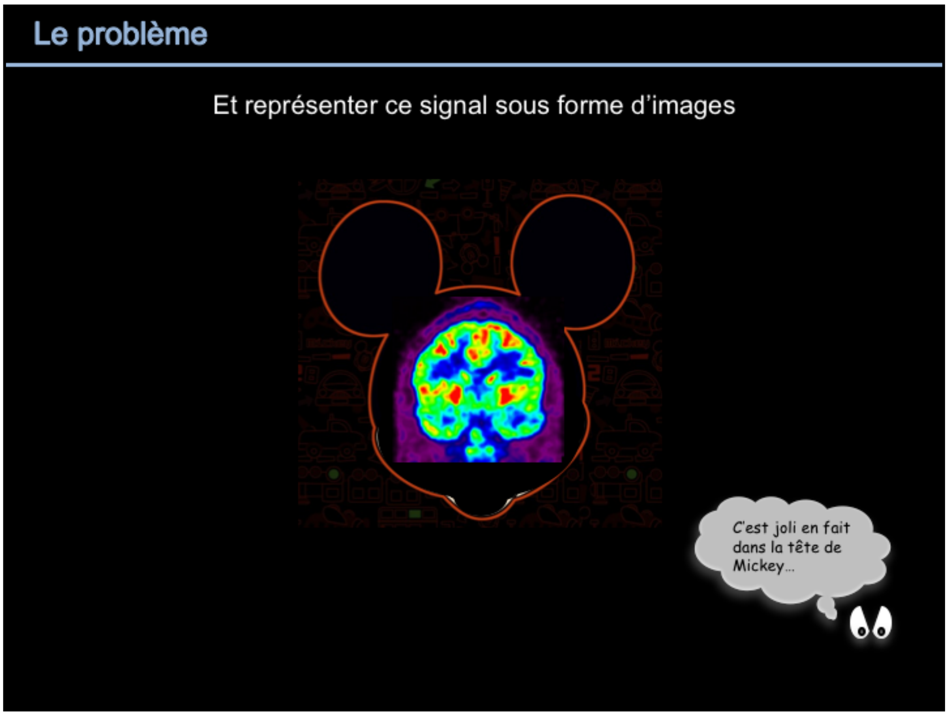
Dans le cas de la tomographie d'émission utilisée en imagerie médicale, le signal émis provient d'une solution radioactive administrée au patient (sans danger aucun tant elle est administré en petite quantité). Cette solution s'appelle un radiotraceur. Elle permet de visualiser le fonctionnement des organes. A ce stade, si vous êtes déjà perdu, référez vous au document concernant les molécules espionnes qui se trouve sur mon site (www.guillemet.org/irene/vulgarisation).



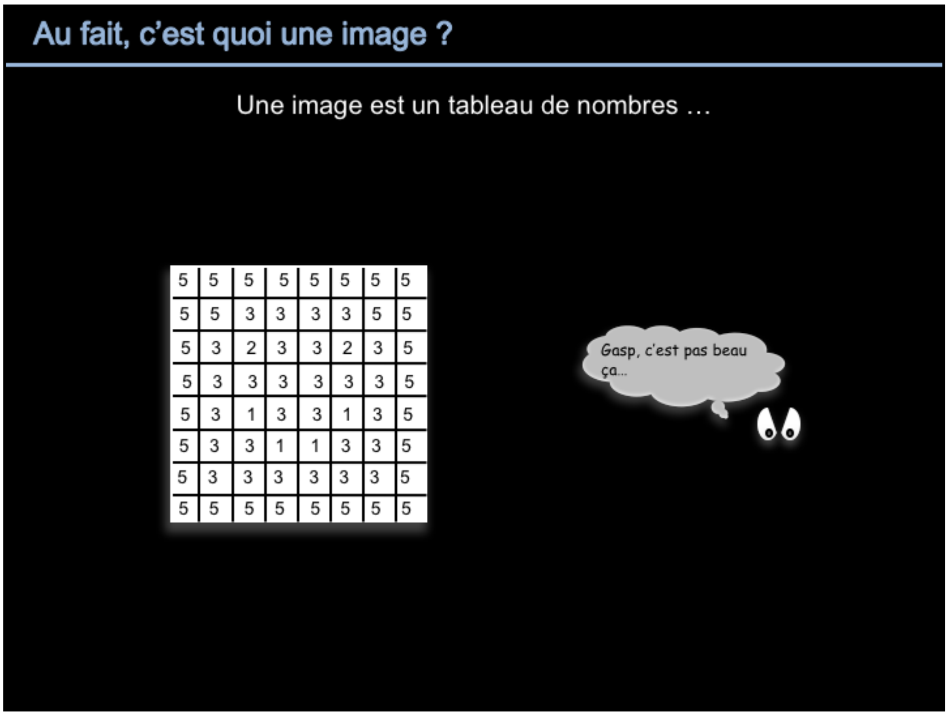
Ce radiotraceur conduit à l'émission de photons, c'est à dire des particules de lumières. Un détecteur va donc détecter des photons tout autour du patient examiné, ici sa tête. Il s'agit alors de déterminer la répartition du radiotraceur dans la tête à partir des ces photons détectés.



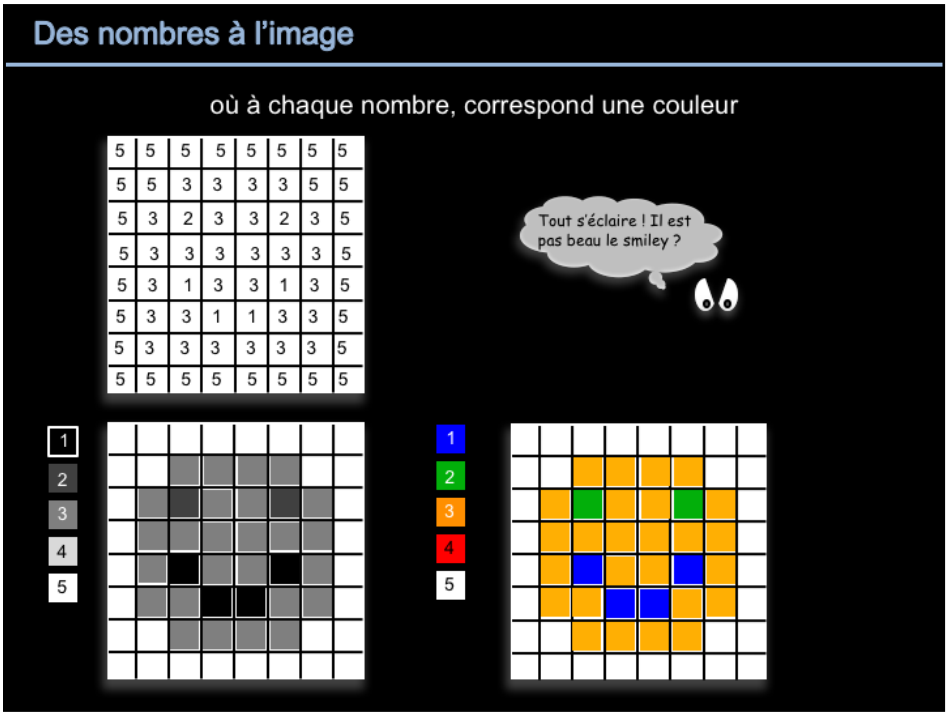
On peut donc représenter le problème ainsi.



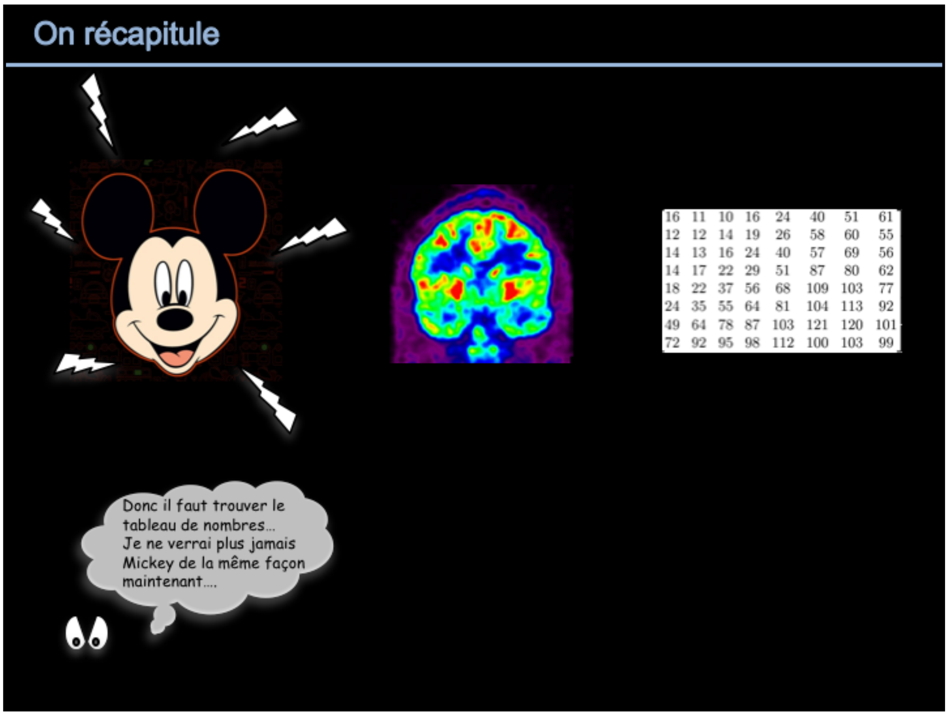
La répartition du radiotraceur dans l'organisme va être décrite par des images, ou plus exactement par une image tridimensionnelle, c'est-à-dire spécifiant la concentration du traceur dans en chaque point de l'espace (ici, de la tête).



Pour comprendre les techniques de tomographie, il faut se souvenir qu'une image n'est autre qu'un tableau de nombres.

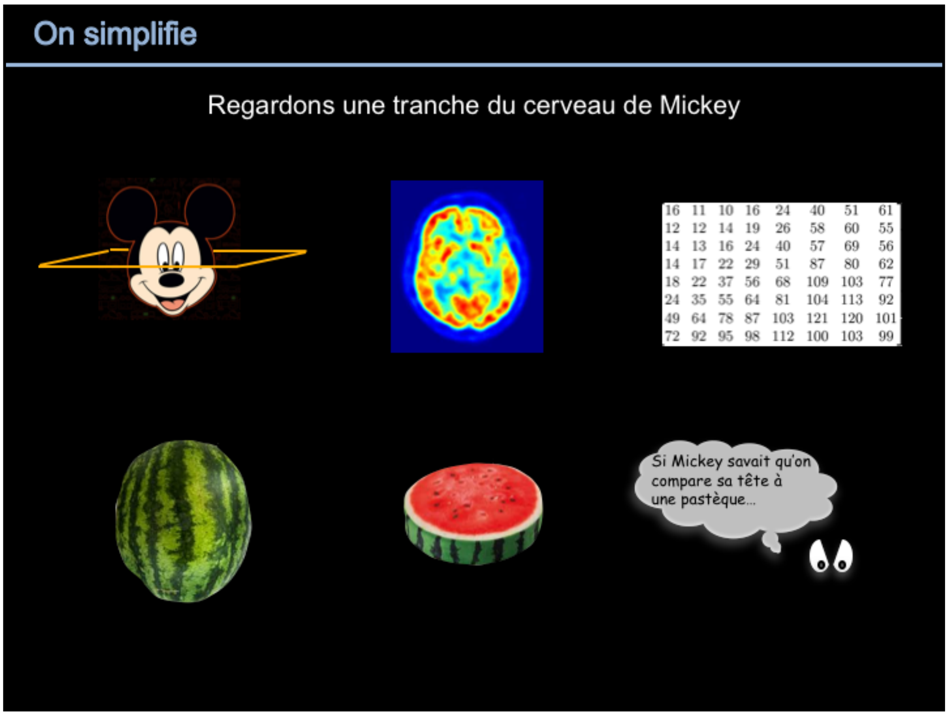


Si chaque nombre est représenté par une couleur, suivant un code qu’on appelle une échelle de couleurs, on perçoit une image. Ici, j’ai représenté deux images correspondant au même tableau de nombres, qui correspondent à deux échelles de couleur différentes.

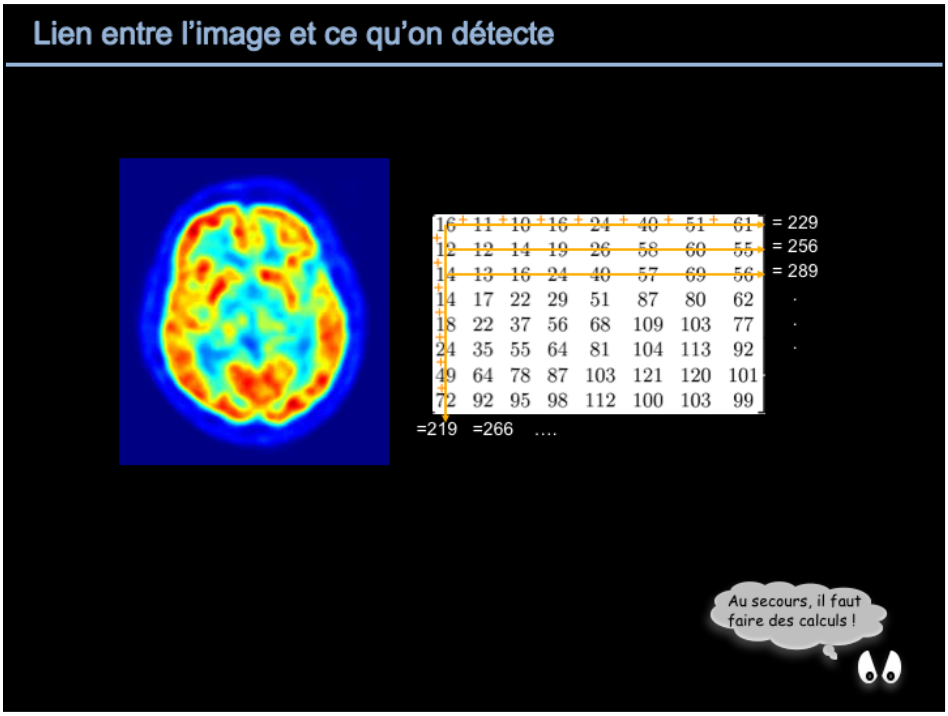


16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

Donc pour résumer, la tomographie d'émission consiste à estimer la répartition d'un signal dans un objet, ici la répartition d'un radiotraceur administré au patient, à partir des photons détectés à l'extérieur du patient. Cette répartition va être représenté sous la forme d'image, sachant qu'une image est un tableau de nombres. Il va donc s'agir d'estimer le tableau de nombres qui a donné naissance aux signaux mesurés à l'extérieur du sujet.

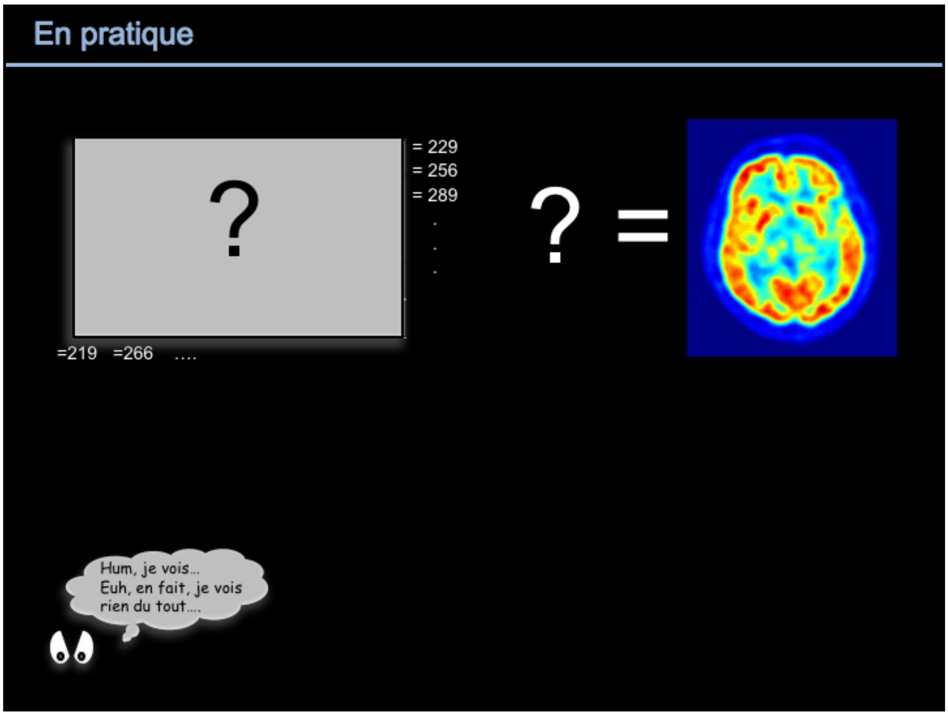


Pour décrire le principe de la reconstruction tomographique, il est pratique de simplifier un peu le problème. Nous allons considérer uniquement une coupe à travers la tête et tenter de comprendre comment on peut estimer l'image de cette coupe, c'est à dire le tableau de nombres qui décrit le signal présent dans cette coupe.

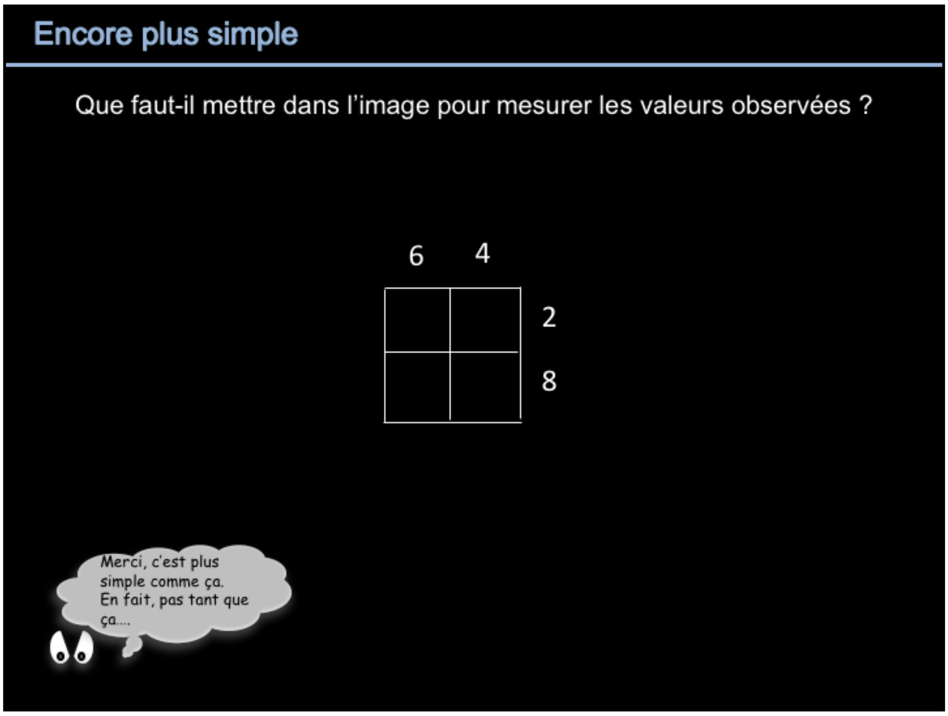


Pour cela, il faut établir le lien entre le signal qu'on détecte, et le signal dans la coupe. En mathématique, c'est ce qu'on appelle le « problème direct ». Dans le cas de la tomographie d'émission, ce lien est simple. Les mesures externes sont la somme des valeurs présentes dans chaque élément de l'image suivant les directions dites « de projection », ici figurées par les lignes orange.

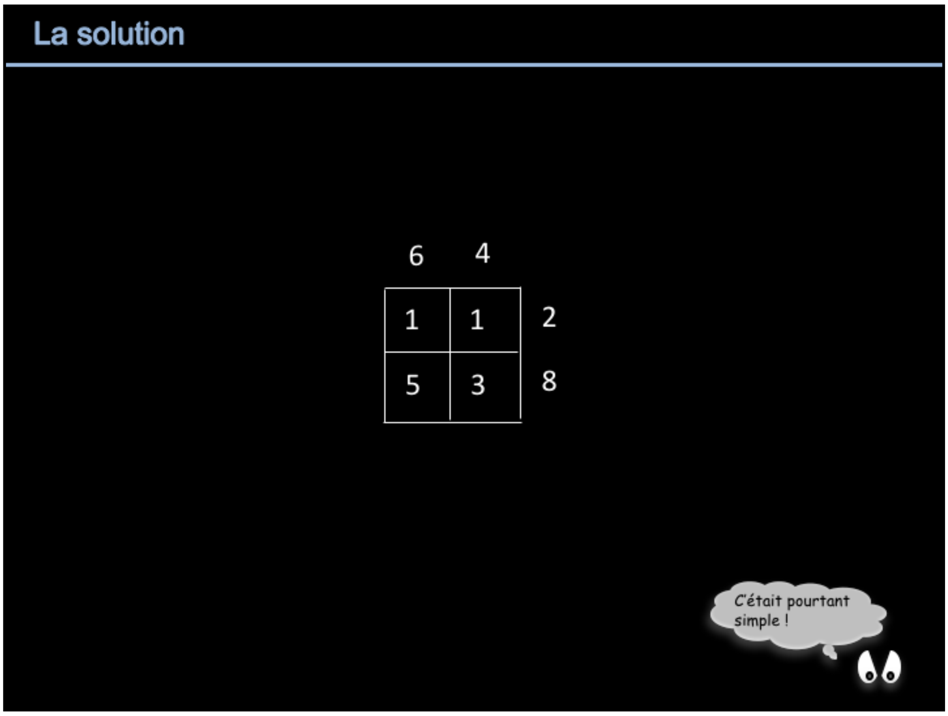
PS : en fait, c'est un peu moins simple que ça, mais pour le propos, nous allons faire cette simplification.



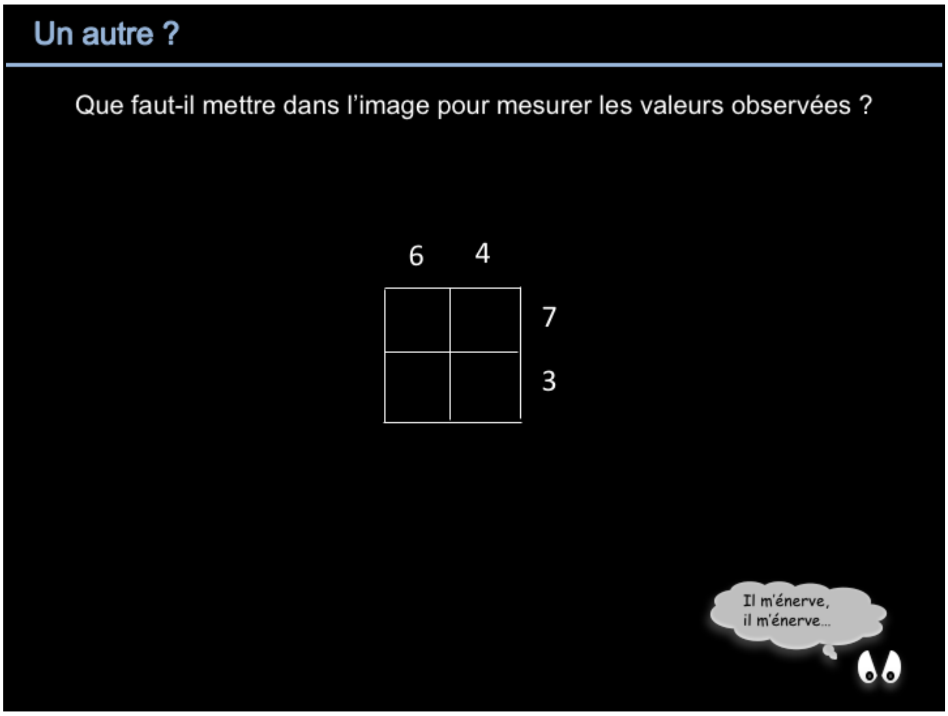
En pratique, nous allons donc devoir déterminer les valeurs dans l'images telles que leurs sommes en ligne et en colonne soient identiques aux valeurs mesurées. On parle de résolution du « problème inverse » : retrouver le signal qui a conduit aux mesures lorsqu'on dispose des mesures.



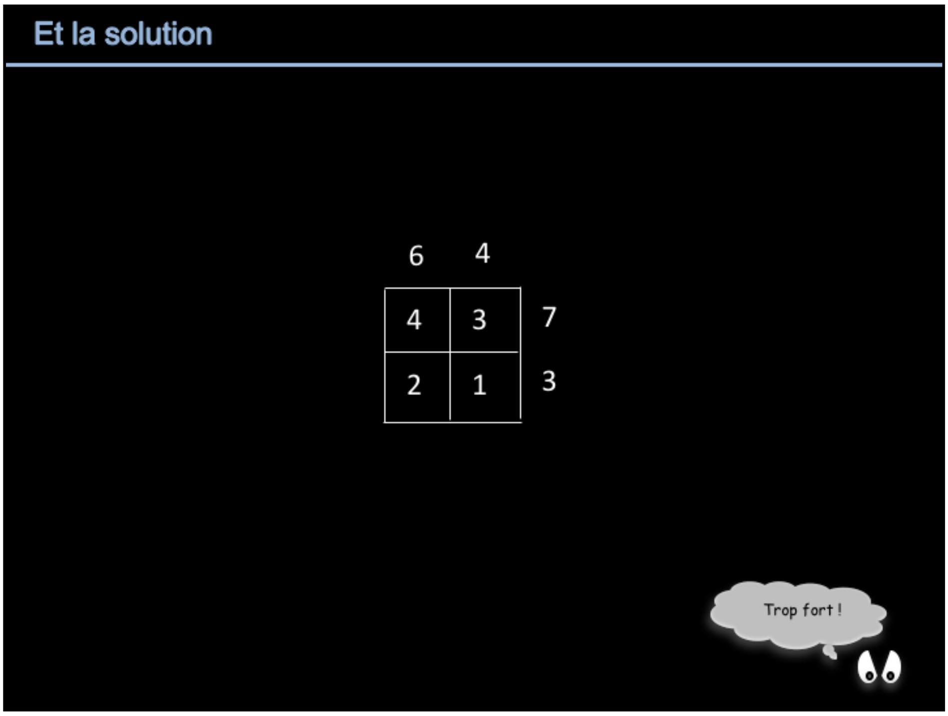
Il existe de très nombreuses méthodes pour résoudre ce problème inverse. Pour pouvoir faire les calculs à la main, nous allons considérer une image composée de 4 valeurs seulement. Pour cette image, nous mesurons les valeurs indiquées en blanc. La question est de déterminer les 4 valeurs à mettre dans l'image pour qu'elles conduisent aux valeurs mesurées en blanc, en effectuant les sommes en ligne et en colonne. Je vous assure que c'est plus facile qu'un Sudoku !



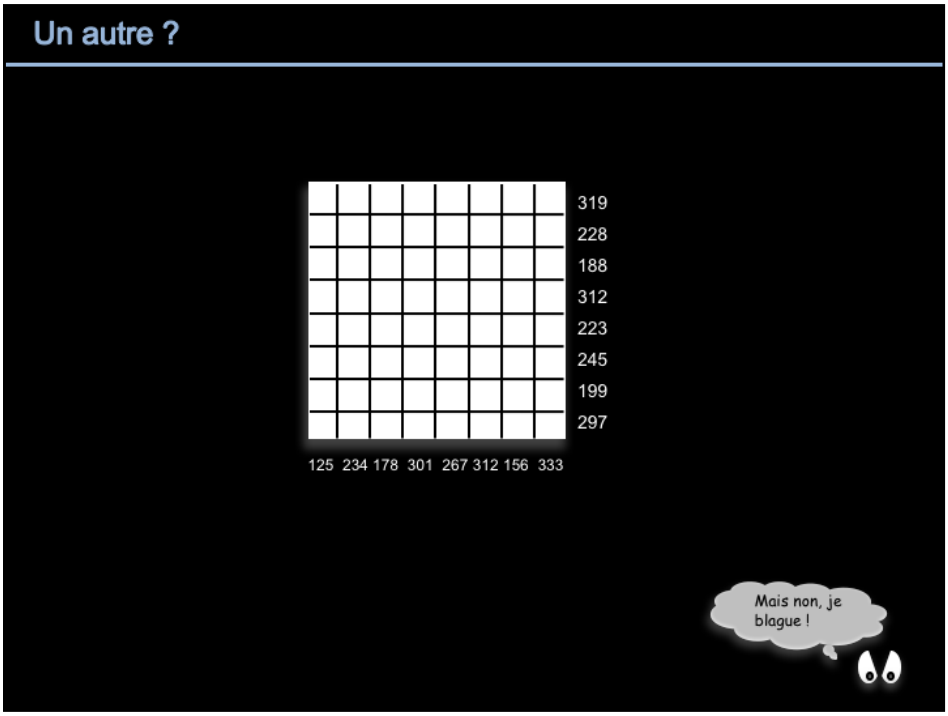
Voilà un résultat possible : la somme des uns sur la première ligne fait bien 2. Cinq plus trois égal 8. En colonne, 1+5=6, et 1+3=4.



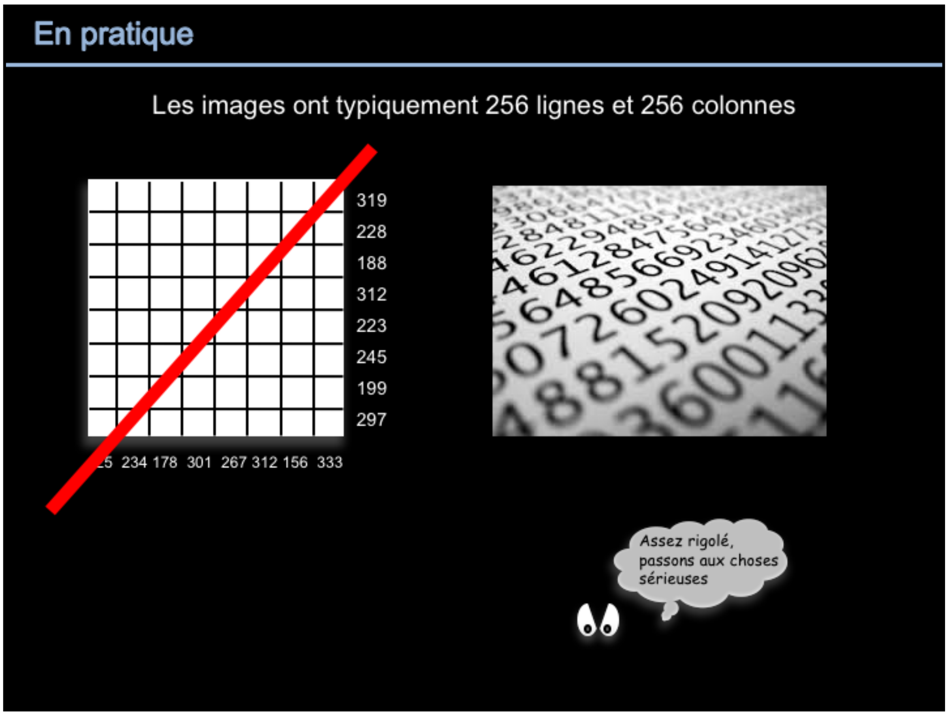
Pour de si petites images, on peut trouver la solution de tête. Comme ici.



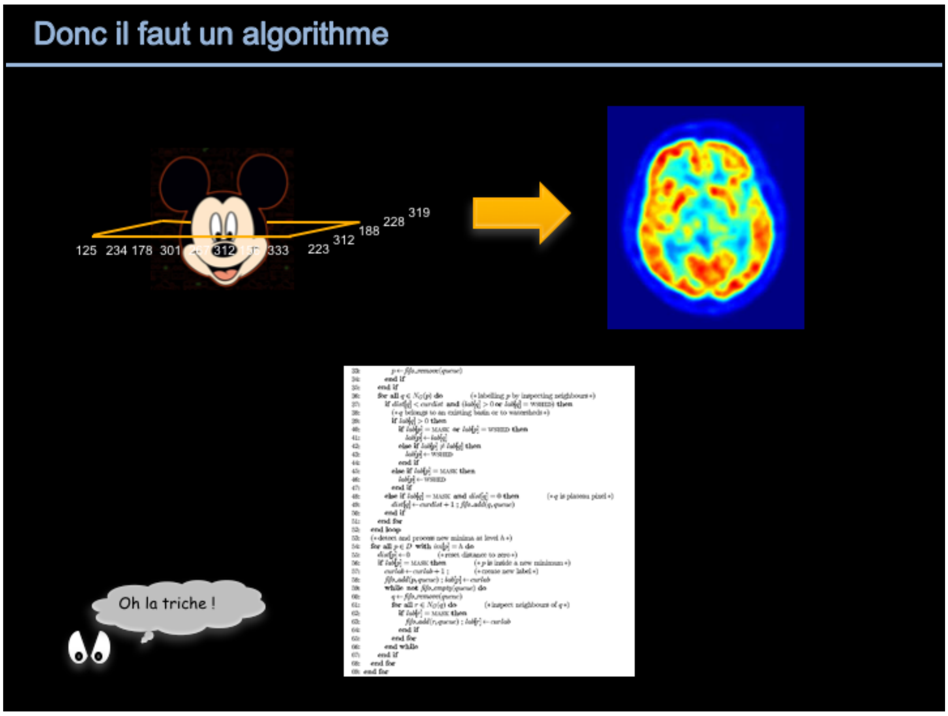
C’est très facile.


Un autre ?
319
228
188
312
223
245
199
297
125 234 178 301 267 312 156 333
Mais non, je blague !

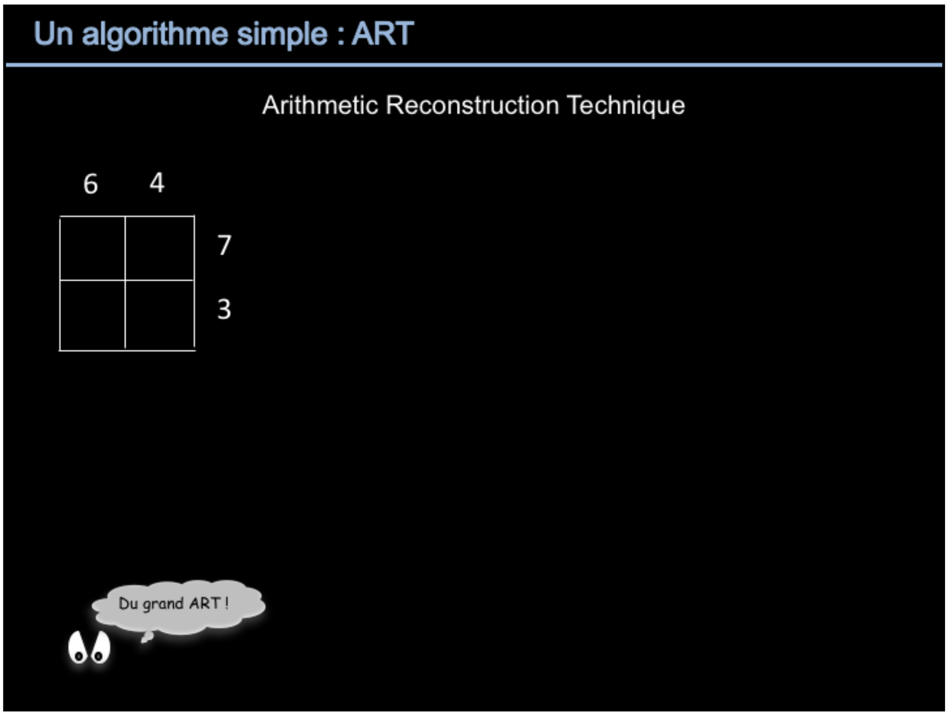
Allez y …



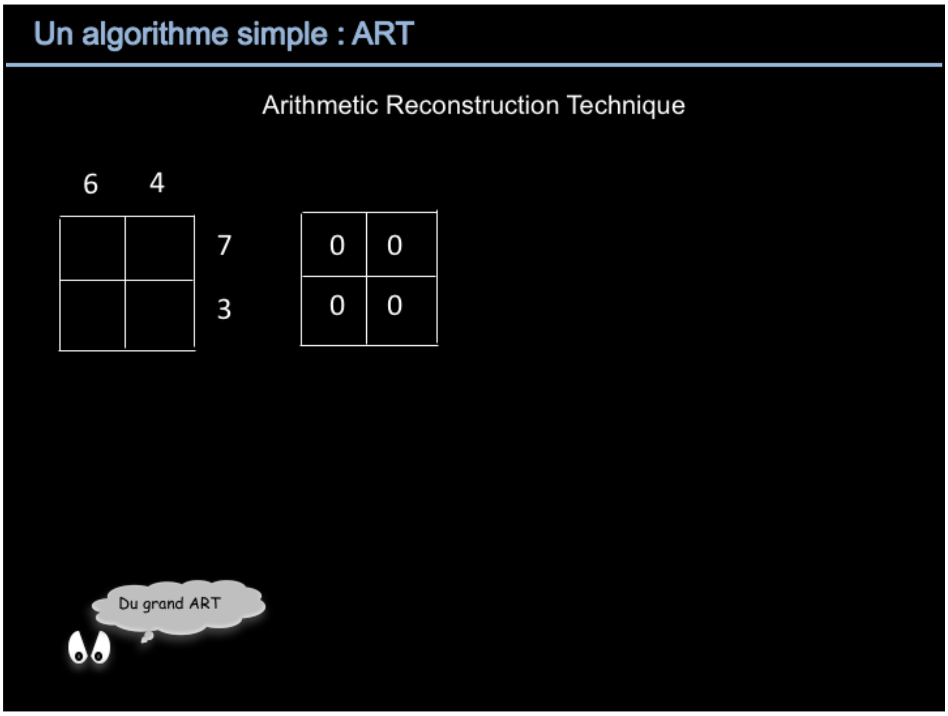
Il est aisé de comprendre que pour des grandes images, il faut s’aider d’un algorithme.



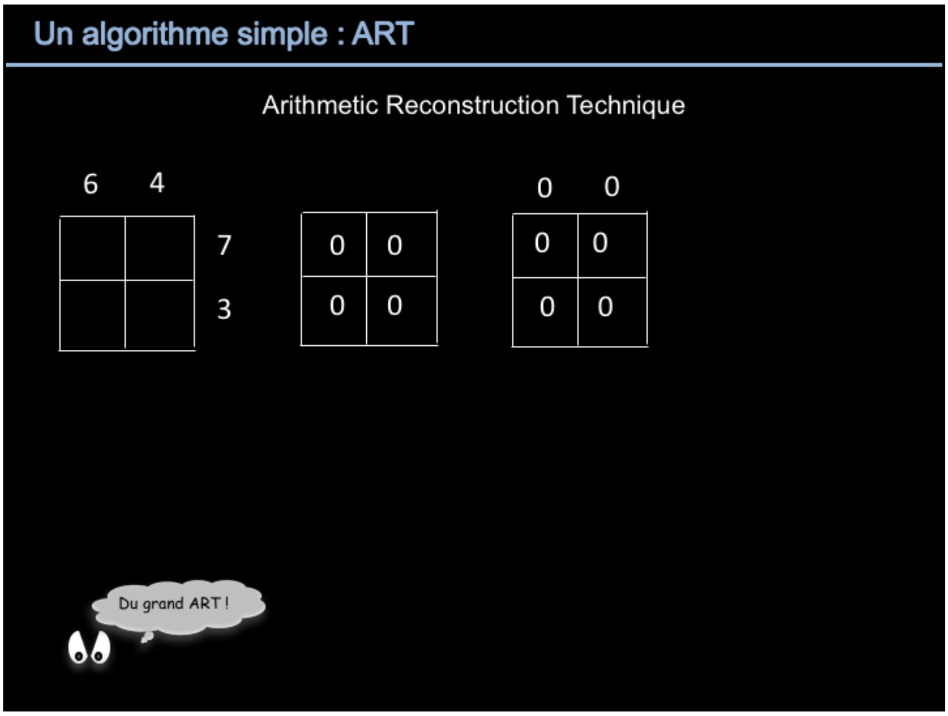
Cet algorithme va donner, de manière déterministe, l'image qui correspond aux mesures.



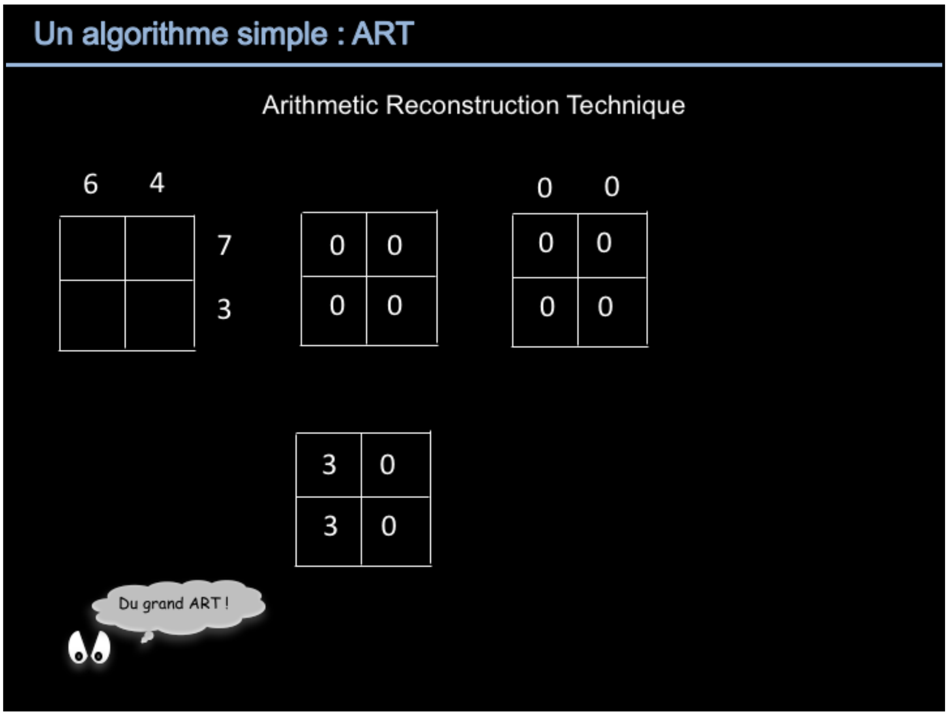
Il existe de très nombreux algorithmes dits de reconstruction tomographique. Pour vous en faire saisir le principe, nous allons utiliser la technique de reconstruction arithmétique appelée ART.



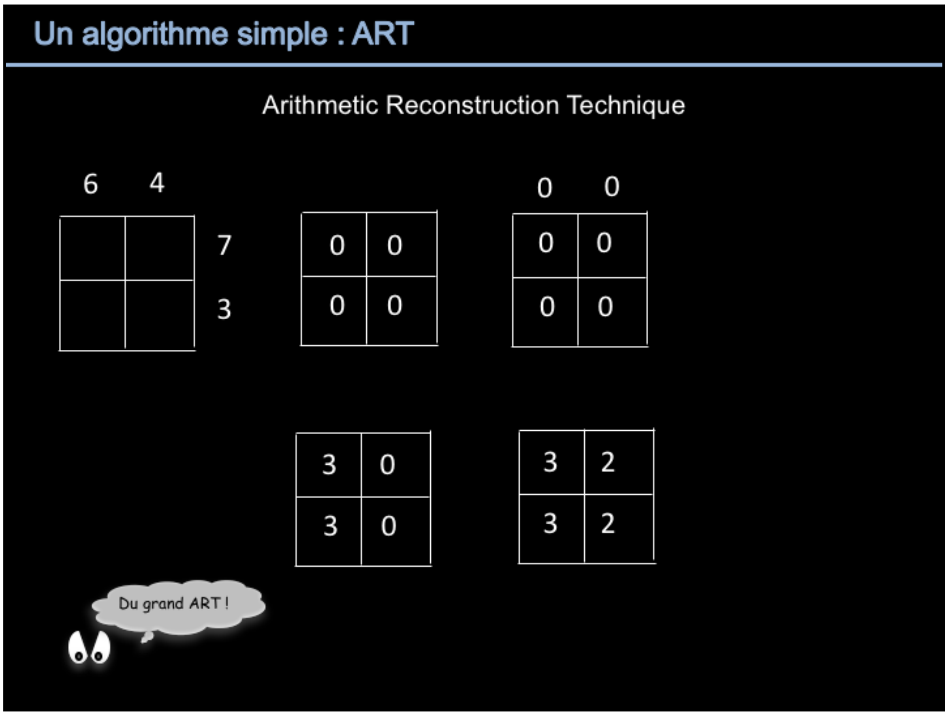
Dans cette technique, on se donne au départ une image arbitraire. Ici, je prends une image dans laquelle je mets des zéros dans chaque élément.



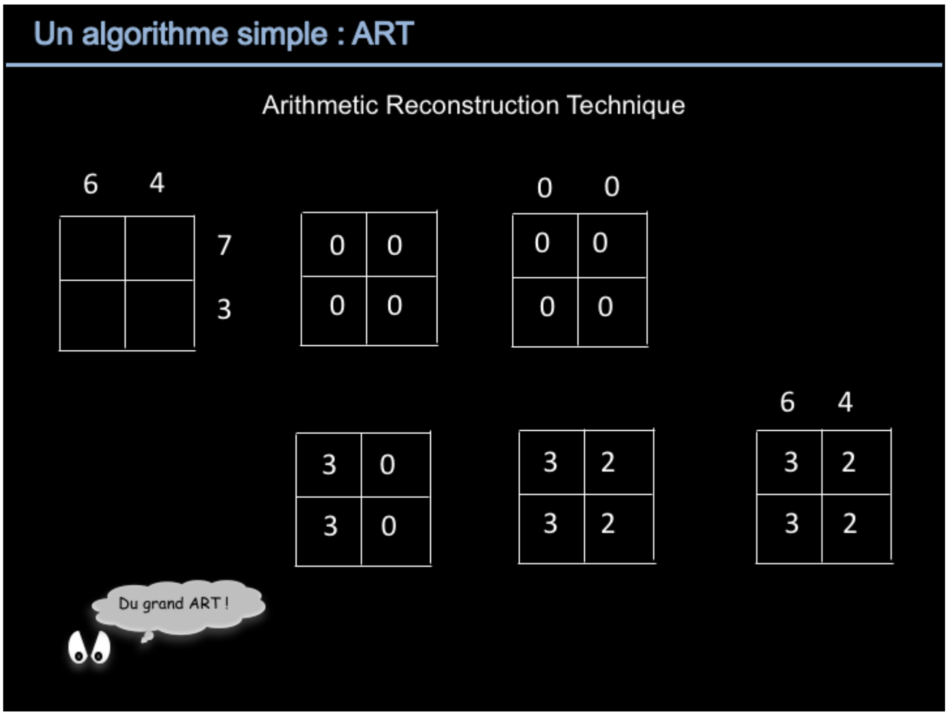
Ensuite, nous allons déterminer quelles mesures nous aurions obtenues à partir de cette image, on utilisant la modélisation du problème direct.
Donc ici, nous faisons la somme, en commençant par les colonnes. En colonnes, au lieu de 6 et 4, nous obtenons 0 et 0. Ceci signifie que les valeurs 0 que nous avons mises sont trop petites et que nous avons sous estimés le signal présent dans l'image.



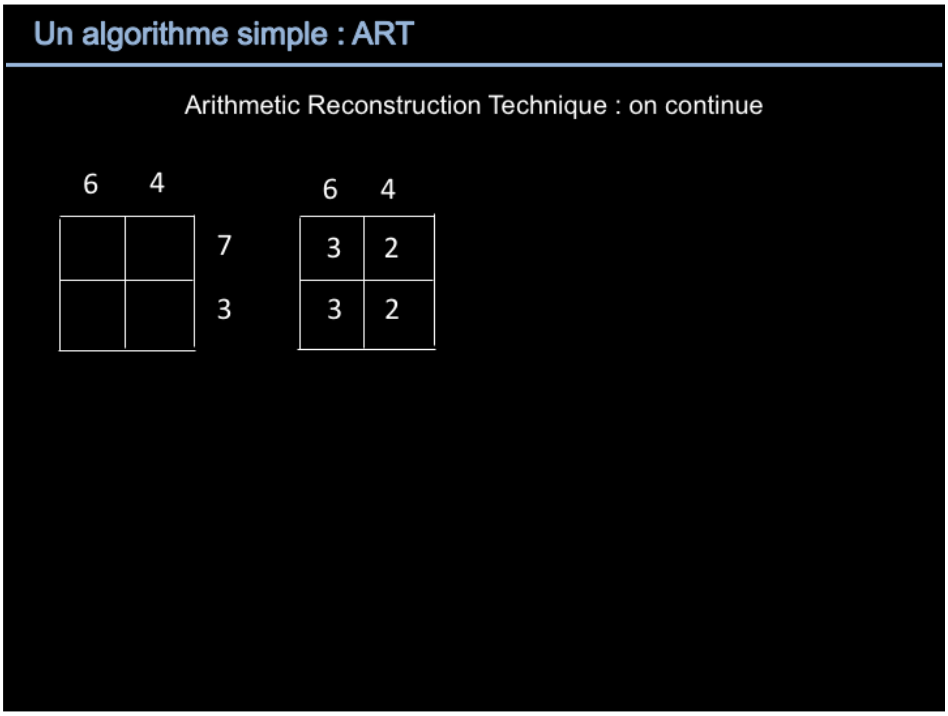
Prenons la première colonne. Il faut obtenir 6 en sommant ses 2 valeurs. On pourrait mettre 0 et 6, 1 et 5, ou 2 et 4, ou 3 et 3, ou 4 et 2, ou 5 et 1, ou 6 et 0. Comme on ne sait pas d'où vient le signal, on met la solution qui ne privilégie aucune des cases, donc on met 3 dans chacune des 2 cases. Ainsi, la somme pour cette première colonne fait bien 6.
Et on procède de la même façon pour la 2ème colonne.



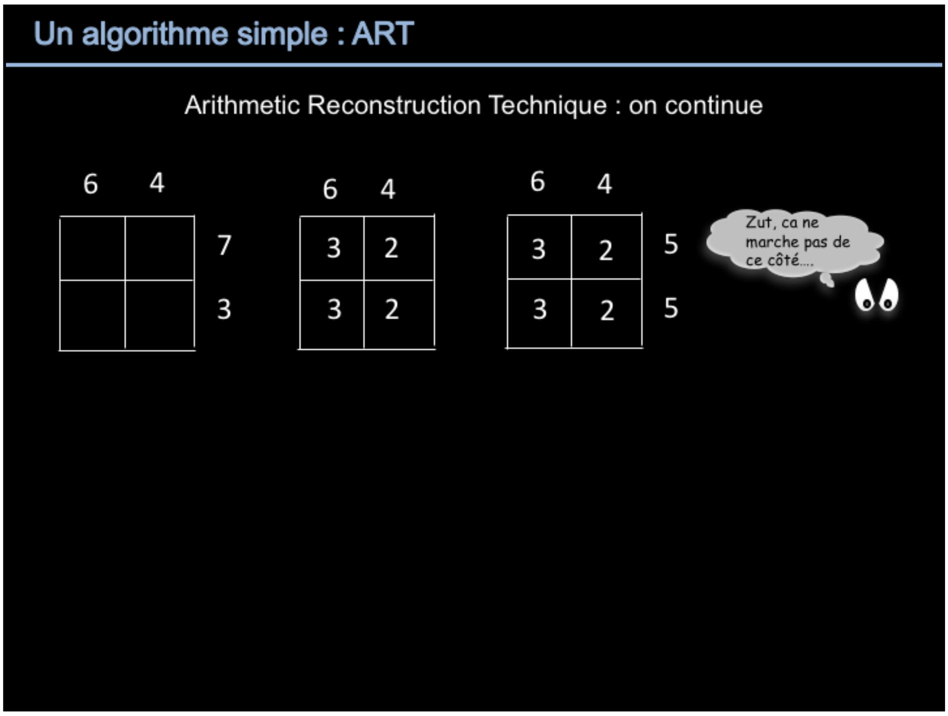
Ainsi, on va mettre 2 dans chacune des 2 cases, car 2+2=4 qui est bien la somme qu'il faut trouver dans la 2ème colonne.



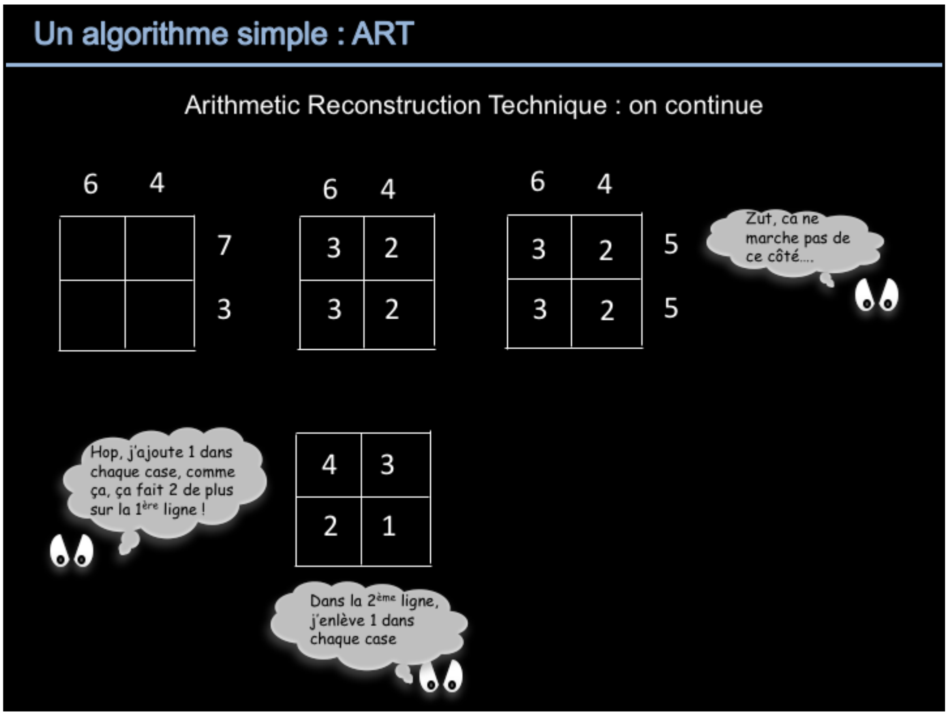
Ceci étant fait, nous avons dans l'image des valeurs qui reproduisent parfaitement les mesures faites en colonnes.
Regardons maintenant les lignes.



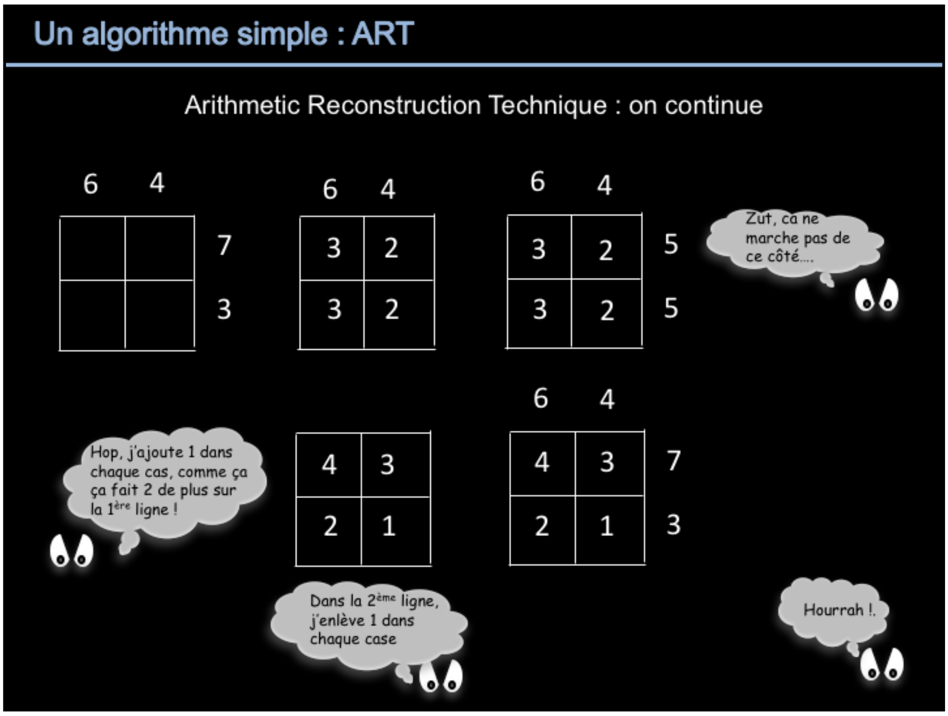
Nous effectuons la somme des deux valeurs de la première ligne, puis la somme des 2 valeurs de la 2ème ligne.



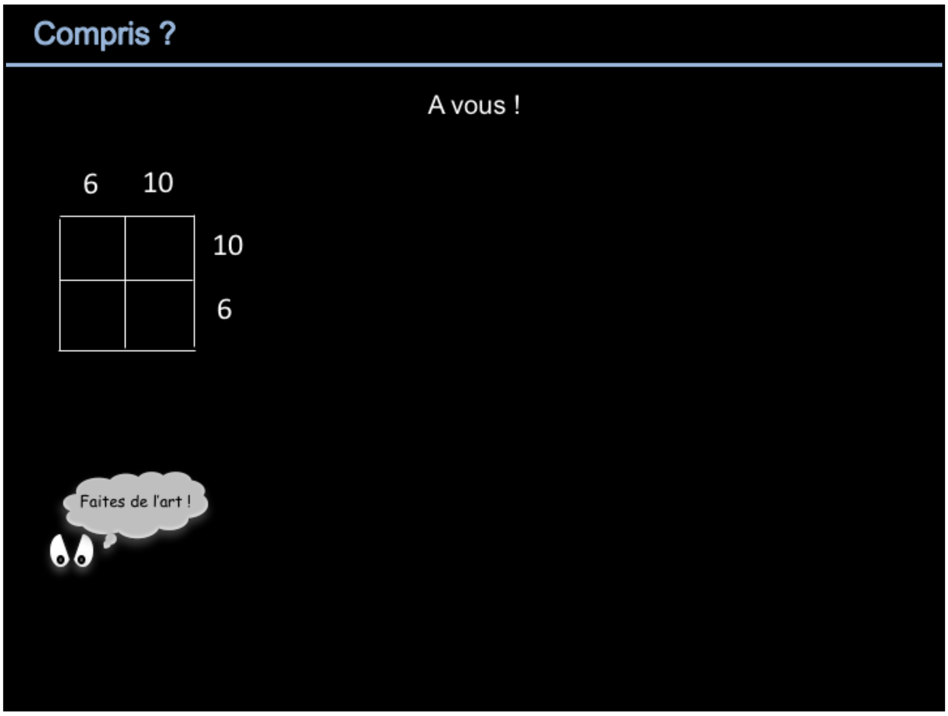
Nous obtenons ainsi la valeur de 5 pour chacune des 2 lignes. Manque de chance, il fallait obtenir 7 sur la première ligne, et 3 sur la seconde.



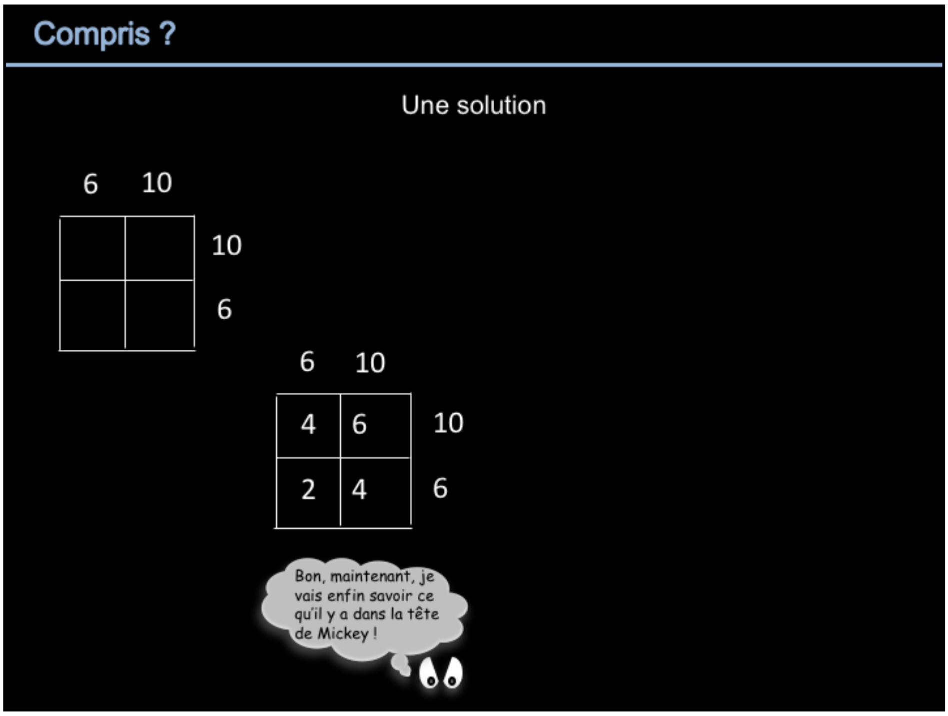
Ce qui signifie que sur la 1ère ligne, nous avons sous-estimé le signal de 2 unités. Comment les ajouter : on pourrait ajouter 2 dans la 1ère case et rien dans la 2ème, ou 2 dans chacune des 2 cases, ou rien dans la 1ère et 2 dans la 2ème.
Comme on ne sait pas, on choisit toujours la solution qui ne privilégie aucune case : on va mettre 1 dans chacune des 2 cas.
Sur la 2ème ligne, même stratégie, mais là, on a un excès de 2 unités, car on a mesuré 5 alors qu'on aurait du mesurer 3. Donc il faut enlever 2 unités en tout sur la ligne. On va donc enlever 1 de chaque case.



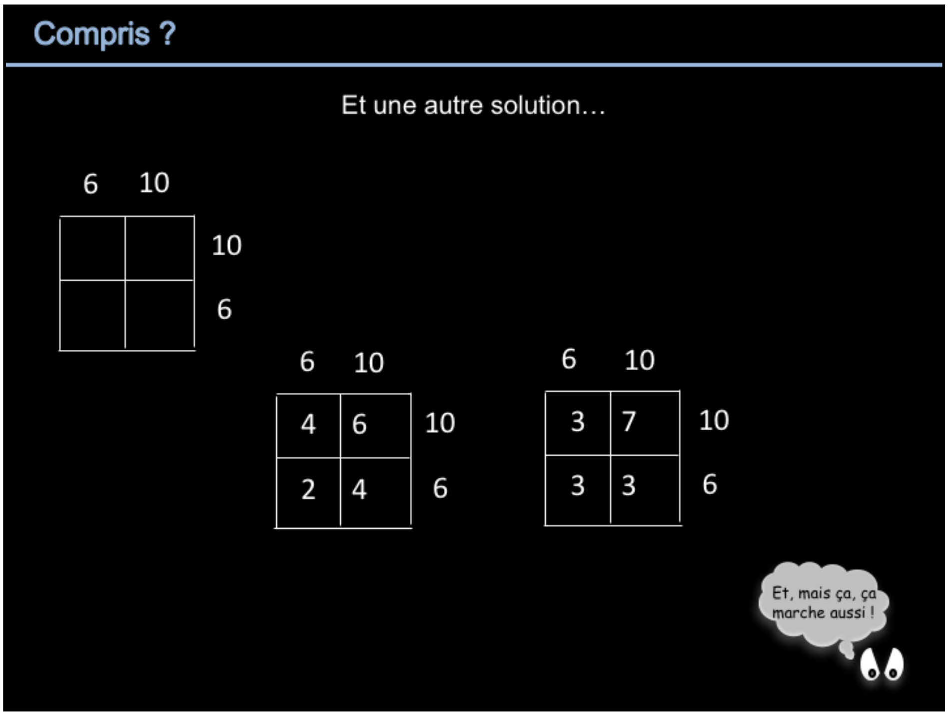
Et maintenant, on recommence en repartant des colonnes. Et miracle (enfin pas tout à fait), ca fonctionne : 4+2=6 et 3+1=4. Donc on a trouvé la solution ! On s'arrête là.



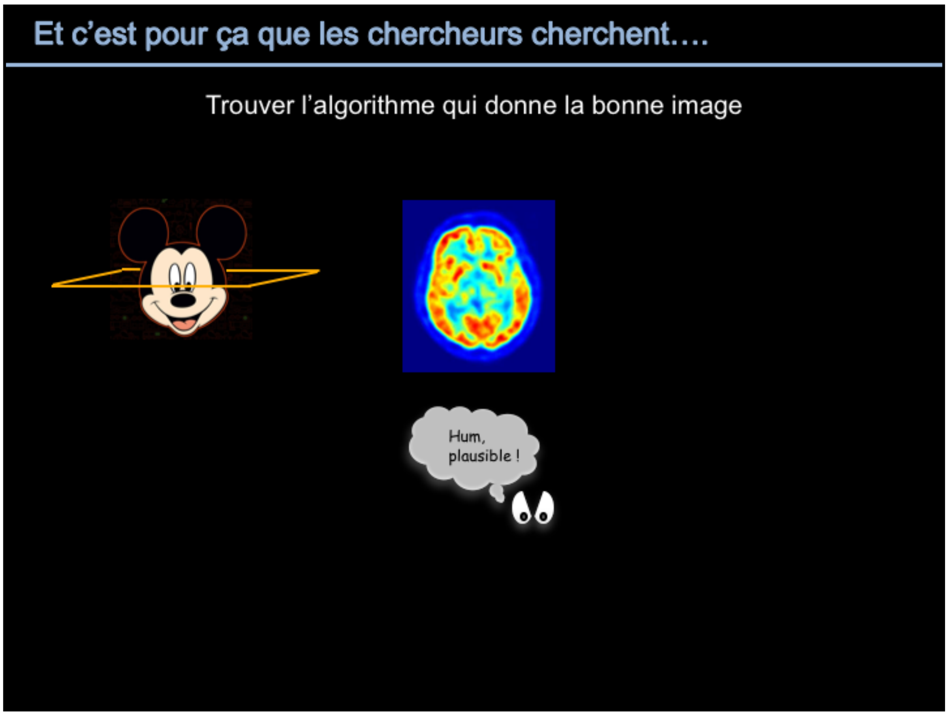
La démarche est donc extrêmement simple : essayez !



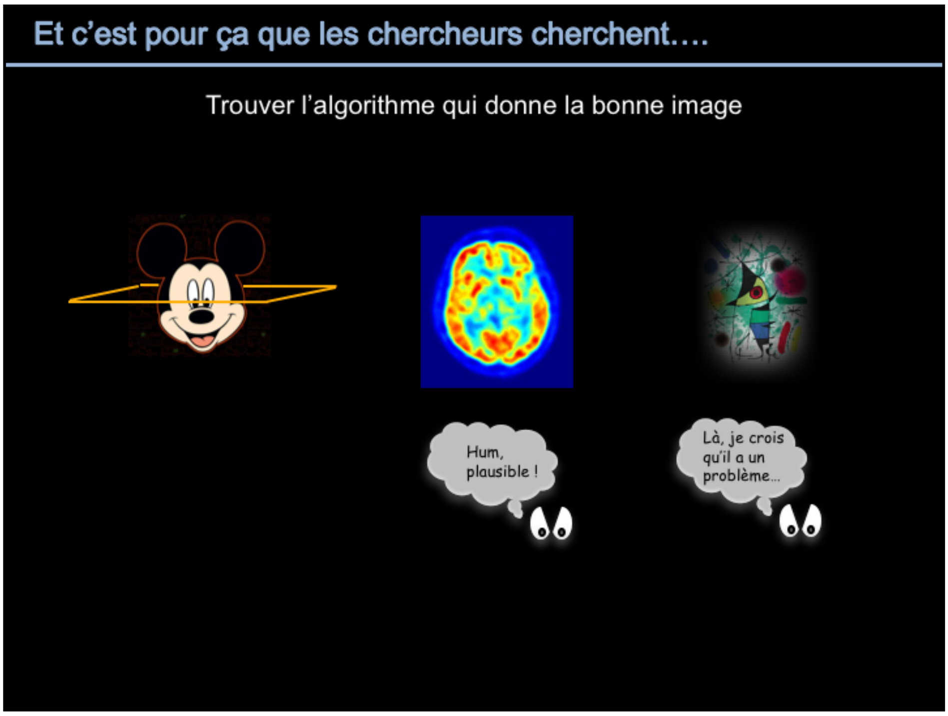
Ici, voici une solution. Vous en avez trouvé une autre. C'est possible. En fait souvent, il y a plusieurs solutions.



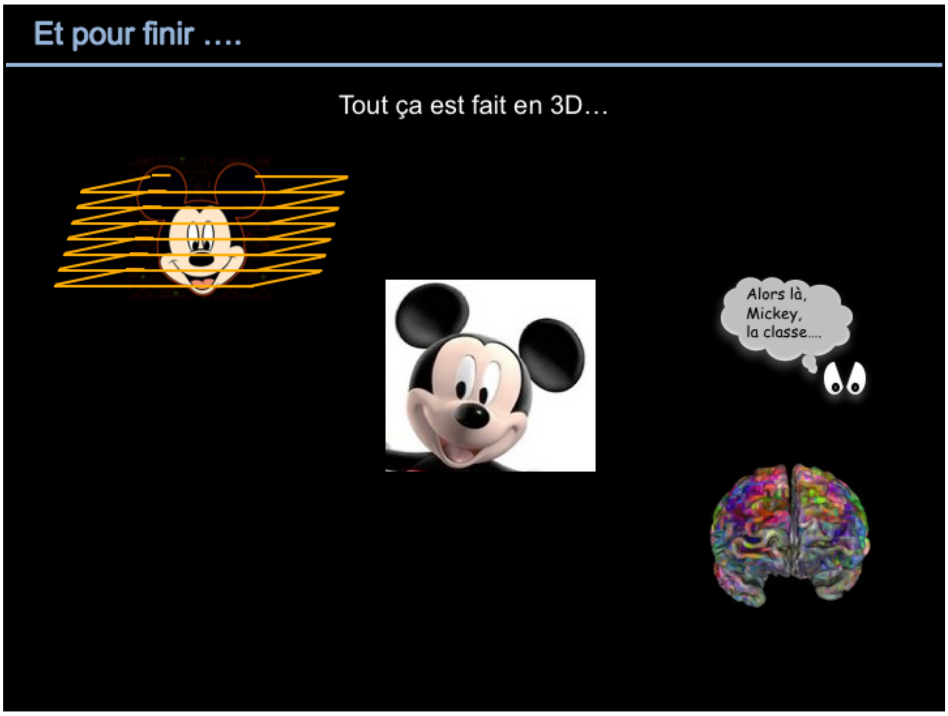
Voici par exemple une autre solution.



Trouver la bonne solution parmi toutes les solutions possibles est un problème non parfaitement résolu, et qui occupe encore aujourd'hui une grande communauté de chercheurs.



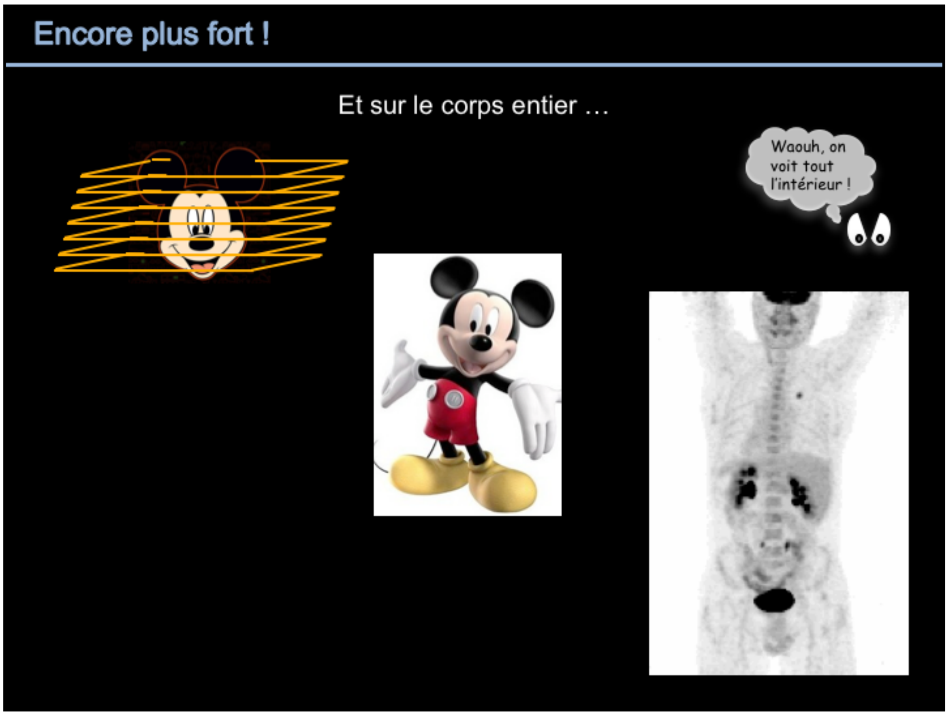
En particulier, pour identifier la bonne solution parmi toutes les solutions possibles, on peut estimer ce qu'on appelle la « vraisemblance » d'une image. Par exemple ici, à droite, si on est dans le contexte d'un examen cérébral, on peut s'apercevoir que la solution correspondant au tableau de Miro est quand même peu vraisemblable. On va donc concevoir des algorithmes qui vont permettre d'écarter une telle solution car elle aura une faible vraisemblance dans notre contexte.
Les techniques qui permettent de favoriser certaines solutions ou d'en pénaliser d'autres rentrent dans la catégorie des techniques dites de régularisation.



J'espère que vous avez ainsi compris le principe de la reconstruction tomographique. En pratique, c'est un tantinet plus compliqué, car j'ai utilisé beaucoup de simplications dans cet exposé. En particulier, on estime des images tridimensionnelles, ce qui rend les choses plus complexes, notamment pour définir le problème direct.

En outre, la définition du problème direct que j'ai utilisée ici est simpliste. En pratique, les photons interagissent avec la matière qu'ils traversent donc le modèle direct est décrit par des équations plus complexes qu'une somme.

Enfin, les mesures ne sont pas parfaites, donc le plus souvent, il n'y a pas de solution du tout. Il faut donc trouver la solution la plus probable, mais qui reste une solution approximative.



En médecine, ces techniques sont aussi utilisées pour des examens dits « corps entier », qui permettent d'examiner la totalité de l'intérieur de l'organisme de façon non invasive. Ces techniques, tout comme l'imagerie médicale, sont en plein essor compte tenu du nombre de mécanismes impliqués dans le fonctionnement de l'organisme que nous parvenons désormais à visualiser.

Pour conclure, et comme illustré dans cet exposé, l’imagerie médicale est donc une discipline hautement pluridisciplinaire, qui fait appel non seulement à la physique pour la conception des instruments d’imagerie, mais aussi aux mathématiques pour la construction des images à partir des signaux délivrés par les instruments. La chimie, la biologie, et la physiologie ne sont pas en reste, mais feront l’objet d’autres exposés.