Rétroprojection filtrée et reconstruction itérative

Rappels théoriques
Propriétés des deux approches et conséquences pratiques
Quelques clefs pour mieux comprendre …

Irène Buvat
U494 INSERM, Paris

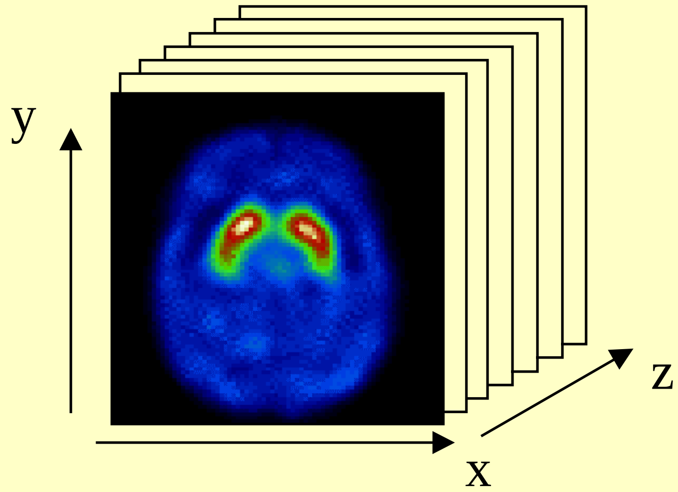
buvat@imed.jussieu.fr
http://www.guillemet.org/irene

8 janvier 2002

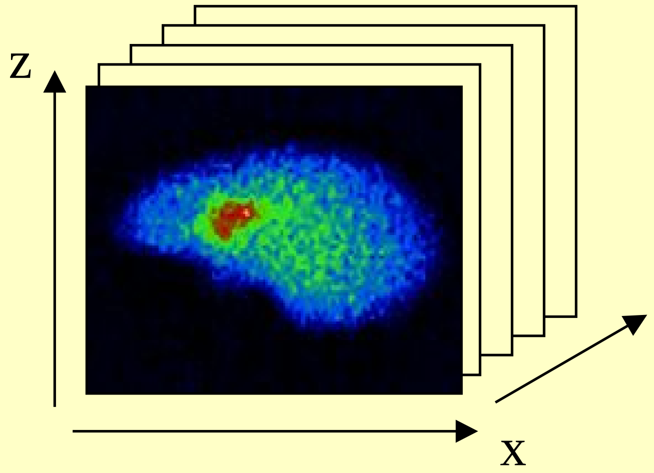
Rappels théoriques

Le problème pratique de reconstruction tomographique

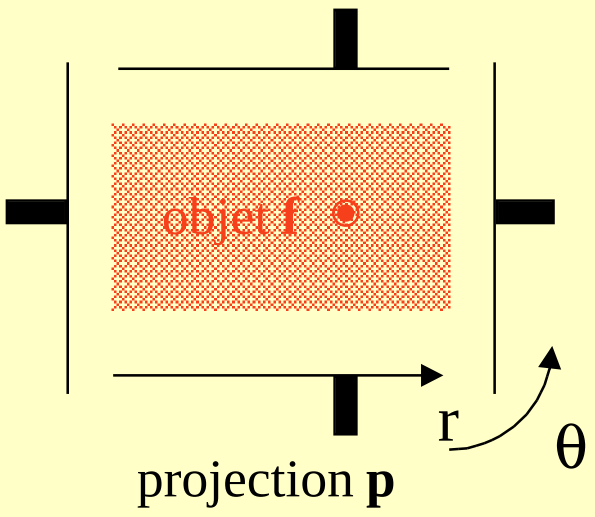
Reconstruire une distribution d'activité tridimensionnelle **f** (3D) ...



… à partir des projections 2D mesurées **p**



Le problème mathématique de reconstruction tomographique



$$\mathbf{p}(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x,y)\, dv$$

ensemble des projections pour θ = [0, π] : transformée de Radon de **f**(x,y)

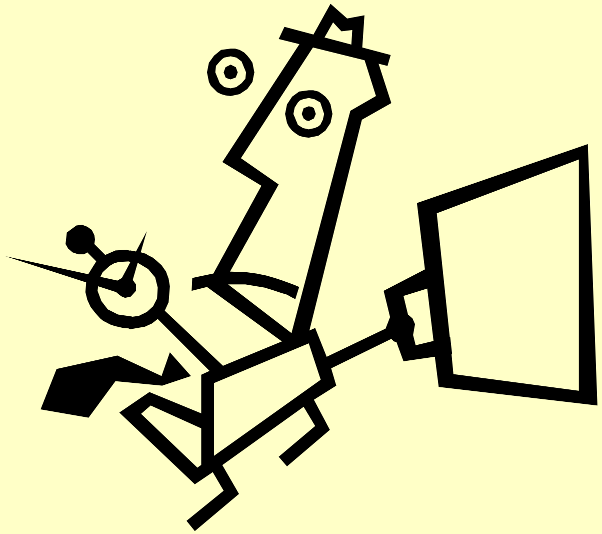
$$R\,[\mathbf{f}(x,y)] = \int_{0}^{\pi} \mathbf{p}(r,\theta)\, d\theta$$

Problème :

inverser la transformée de Radon, i.e., estimer **f**(x,y) à partir de **p**(r,θ)

Le problème de reconstruction tomographique

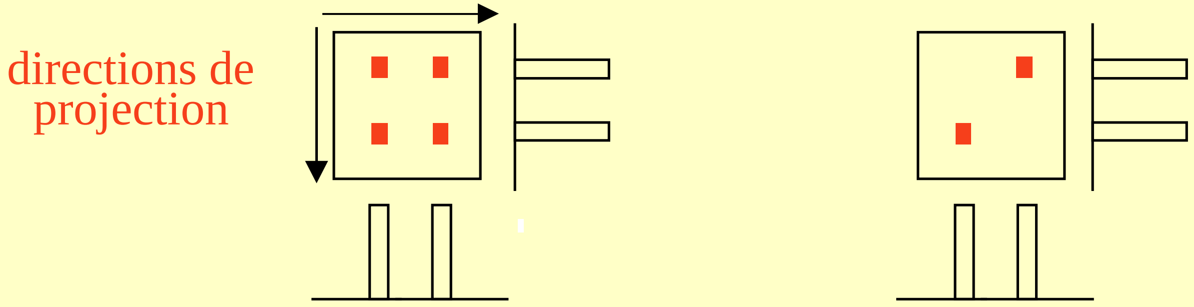
Pourquoi si difficile ?



Un problème dit « mal posé »

• Pas de solution unique : toujours plusieurs objets **f** compatibles avec un ensemble fini de projections

2 projections : plusieurs solutions possibles



➡ Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

En pratique : pas de solution, même si les données sont quasiment non bruitées

• Données incohérentes à cause du bruit et des biais (diffusion, atténuation, etc) : de petites différences sur les projections **p** peuvent provoquer des écarts importants sur les coupes reconstruites **f** : solution instable

En pratique : « la » solution n'existe pas : toute solution n'est qu'une approximation

Deux approches de reconstruction

- Reconstruction analytique

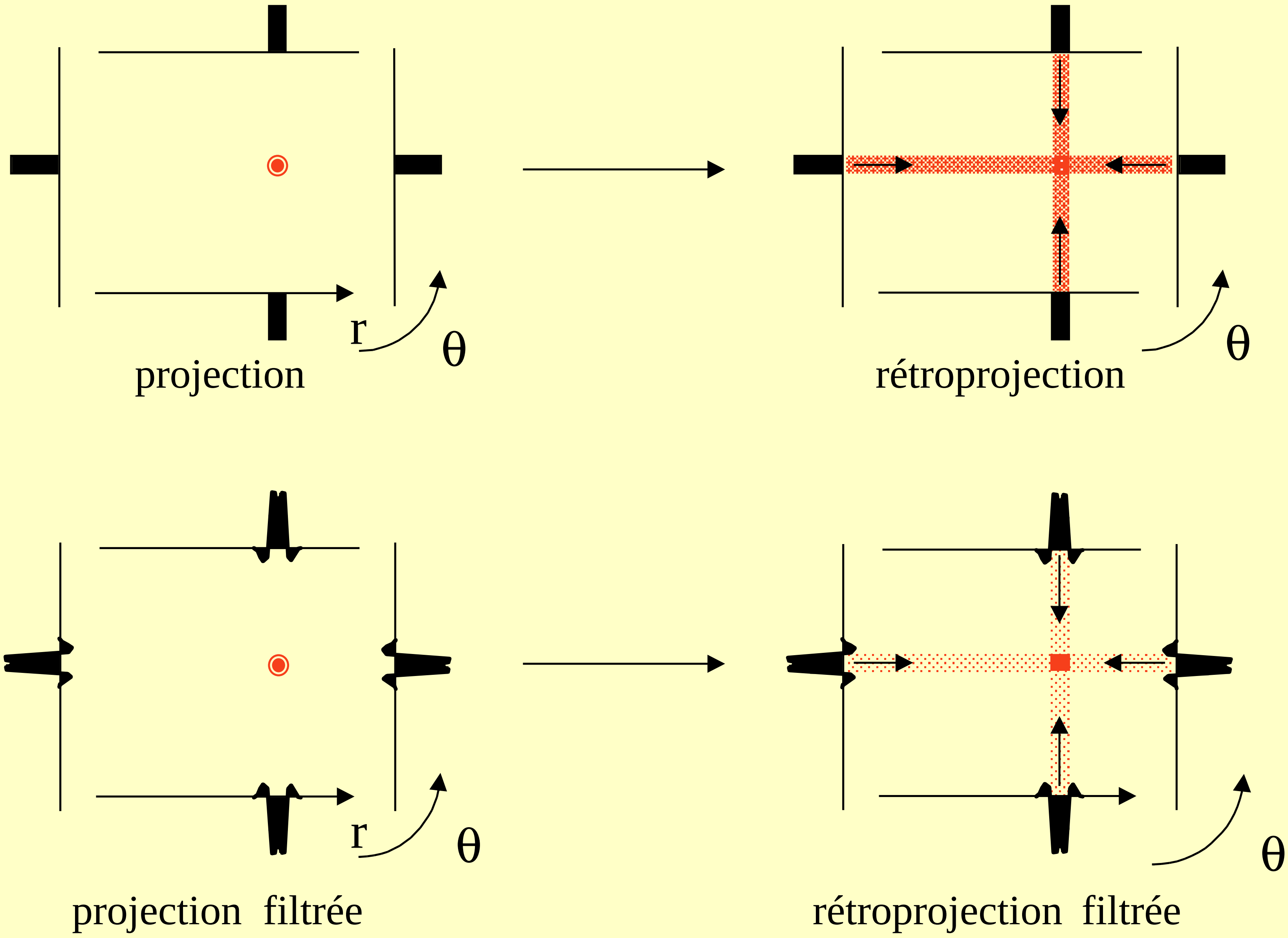
  L'unique méthode utilisée est la rétroprojection filtrée (FBP)

- Reconstruction itérative

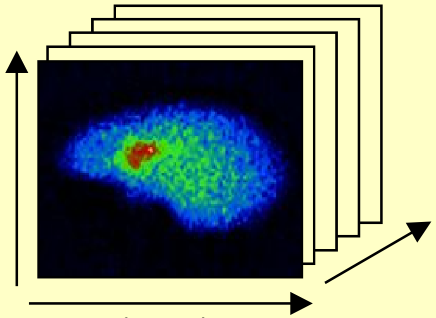
  La plus courante est MLEM (Maximum Likelihood Expectation Maximization) ou sa version accélérée OSEM (Ordered Subset Expectation Maximization)
  … mais ce n'est pas la seule !

  ATTENTION : reconstruction itérative n'est pas synonyme de OSEM, même si c'est la plus répandue !!!

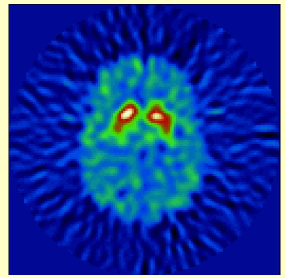
Méthode de rétroprojection filtrée : principe



Méthode de rétroprojection filtrée



projections
$\mathbf{p}(r,\theta)$



images reconstruites
$\mathbf{f}(x,y)$

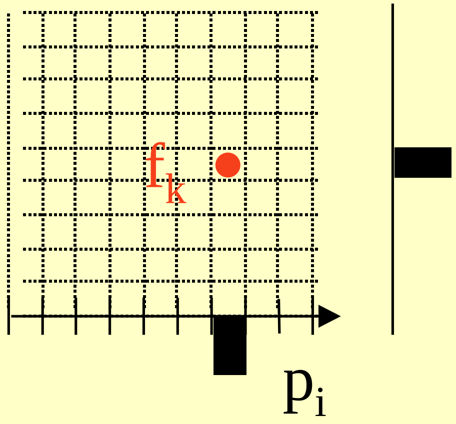
transformée de Fourier

rétroprojection

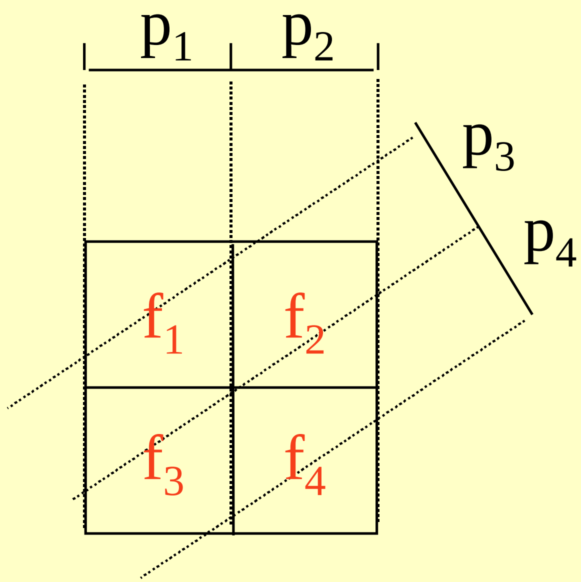
$P(\rho,\theta)$ —filtrage→ $|\rho|\,P(\rho,\theta)$ —transformée de Fourier inverse→ $p'(r,\theta)$

$$\mathbf{f}(x,y) = \int_0^{\pi} p'(r,\theta)\, d\theta \quad \text{avec} \quad p'(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)\, |\rho|\, e^{i2\pi\rho u}\, d\rho$$

Méthodes de reconstruction itérative : principe



projection



$$p_1 = r_{11}f_1 + r_{12}f_2 + r_{13}f_3 + r_{14}f_4$$
$$p_2 = r_{21}f_1 + r_{22}f_2 + r_{23}f_3 + r_{24}f_4$$
$$p_3 = r_{31}f_1 + r_{32}f_2 + r_{33}f_3 + r_{34}f_4$$
$$p_4 = r_{41}f_1 + r_{42}f_2 + r_{43}f_3 + r_{44}f_4$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{41} & \cdots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = R\ \mathbf{f}$$

projecteur

Reconstruction itérative

$$\mathbf{p} = R\,\mathbf{f}$$

Recherche d'une solution f minimisant une distance d entre **p** et R**f**, **p** et R étant connus

estimée initiale de l'objet à reconstruire

$f^{n=0}$

$\mathbf{p} = R\,\mathbf{f}$

$$\hat{p}^n \xrightarrow{\text{comparaison}} \hat{p}^n \text{ vs } p \xrightarrow{\text{facteur de correction } c^n} f^{\,n+1}$$

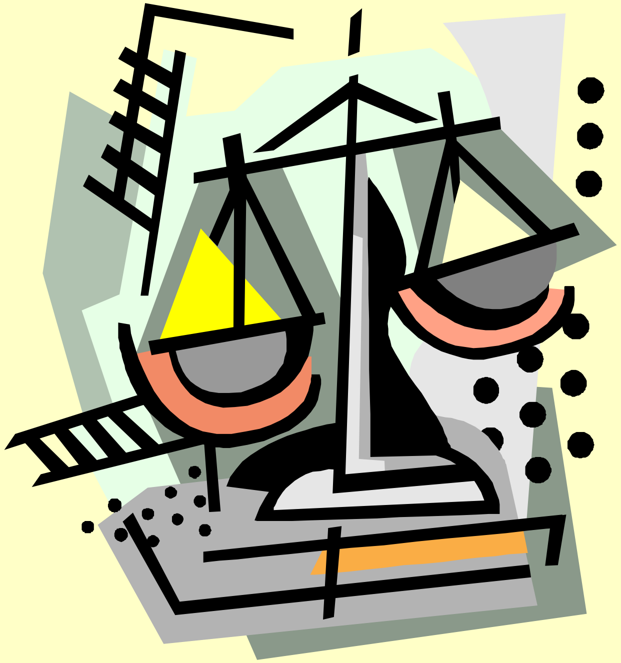
projection correspondant à l'estimée $f^{\,n}$

définit la méthode itérative :

additive : $f^{\,n+1} = f^{\,n} + c^n$

multiplicative : $f^{\,n+1} = f^{\,n} \,.\, c^n$

Comparaison des propriétés des deux approches



1ère différence majeure : position du problème

• Reconstruction analytique : résolution du problème exprimé sous forme *continue*, via le théorème de la tranche centrale, en utilisant des approximations (filtrage)

$$R\,[\mathbf{f}(x,y)] = \int_0^{\pi} \mathbf{p}(r,\theta)\, d\theta$$

• Reconstruction itérative : résolution du problème exprimé sous forme *discrète*, via la résolution d'un système matriciel (résolution d'un problème inverse de grande taille)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{J1} & \cdots & r_{JI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_I \end{bmatrix}$$

128 projections 128 x 128 ➡ 2 097 152 équations à autant d'inconnues

➡ pas de méthode de résolution autre qu'itérative

Conséquences pratiques

• Reconstruction analytique : résolution du problème analytique exprimé sous forme *continue* :

- Utilisable uniquement si le problème possède une solution analytique mathématique :

✓*on ne peut pas corriger théoriquement de l'atténuation avec FBP*

✓*FBP est mal adapté à la reconstruction de données incomplètes*

✓*FBP est mal adapté à la reconstruction de données acquises suivant une géométrie complexe (PET 3D, collimation en éventail, etc.)*

- Opération de *rétroprojection*

✓*présence des artéfacts de raies*

- Opération de *filtrage*

✓*valeurs négatives dans les images*

• Reconstruction itérative : résolution du problème exprimé sous forme *discrète*

- La résolution du système est toujours possible, au sens de l'optimisation d'un critère, même en l'absence de solution théorique

✓*on peut toujours faire appel à la reconstruction itérative (sans garantie sur la qualité du résultat cependant)*

2ème différence majeure : paramètres à fixer

- Rétroprojection filtrée :
  - Le filtre (Hann, Butterworth, etc.)
  - Les paramètres définissant le filtre (fréquence de coupure, ordre)
  - La façon dont est programmé le filtrage (domaine spatial, domaine de Fourier, pré ou post-filtrage)

- Reconstruction itérative :
  - L'image initiale
  - Le nombre d'itérations
  - Le nombre de sous-ensembles si OSEM
  - Le paramètre de régularisation le cas échéant

Conséquences pratiques

• Rétroprojection filtrée :

- Beaucoup de recul concernant le choix des filtres (type et paramètres)
- Pas forcément de choix concernant la programmation du filtrage

✓*l'expérience acquise concernant FBP joue en la faveur de FBP…*

✓*les résultats peuvent être différents d'un site à l'autre de par les différences de programmation de FBP*

• Reconstruction itérative :

- Pas de ligne de conduite générale pour choisir le nombre d'itérations ni de sous-ensembles (pour OSEM)
- Pas de méthode de régularisation « standard » : arrêt précoce des itérations, post-filtrage, …
- Initialisation : image uniforme ou image FBP

✓*l'utilisation « standard » de la reconstruction itérative n'est pas toujours optimale…*

✓*l'initialisation affecte uniquement la vitesse de convergence*

✓*la vitesse de convergence (le nb d'itérations) dépend du contenu de l'image*

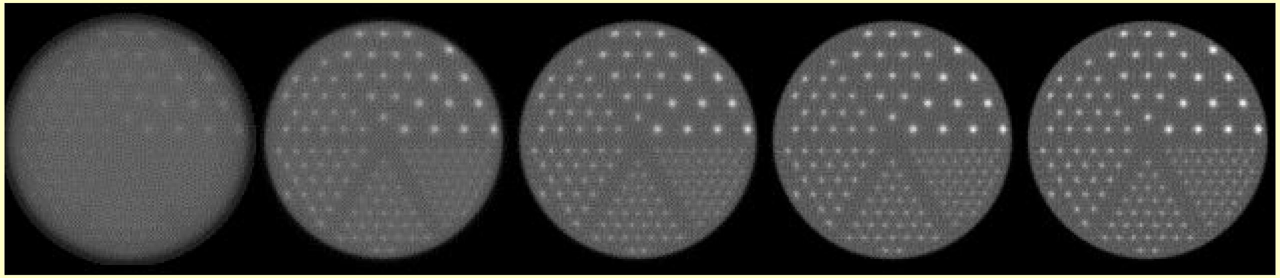
✓*davantage de latitude concernant le choix des paramètres que FBP, donc potentiellement plus puissant, mais pratiquement plus complexe à bien utiliser*

Exemple

- Impact du nombre d'itérations et de sous-ensembles :

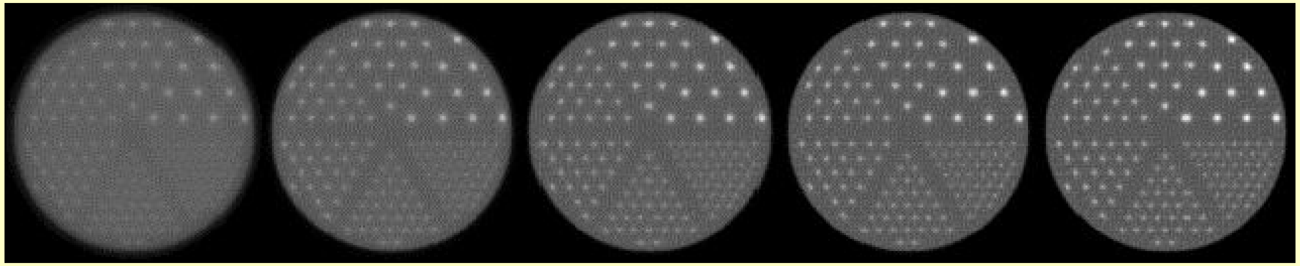
OSEM :
4 sous-ensembles

1 4 6 8 10



OSEM :
8 sous-ensembles

1 2 3 4 5



✓*le nombre de sous-ensembles n'est pas critique si il reste relativement faible par rapport au nombre total de projections (les nombres d'événements dans les sous-ensembles doivent être voisins)*

✓*plus on itère, plus on restaure les hautes fréquentes (résolution spatiale et bruit)*

✓*le nombre d'itérations affecte directement le compromis entre résolution spatiale et bruit dans les images reconstruites : ce choix est **crucial** dans les travaux de comparaison FBP / méthode itérative*

3ème différence majeure : corrections possibles

- Rétroprojection filtrée :

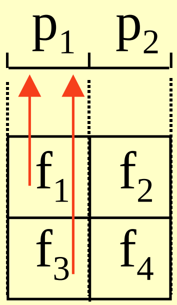
  - pré ou post corrections seulement

  e.g., correction de Chang pour l'atténuation

  correction de Jaszczak pour la diffusion

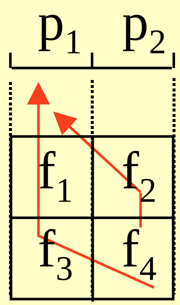
- Reconstruction itérative : $\mathbf{p} = \mathrm{R}\ \mathbf{f}$

  - possibilité d'inclure toutes les corrections *dans* la reconstruction, au moyen d'un opérateur R approprié, de façon à ce que le processus de reconstruction tienne compte *intrinsèquement* des phénomènes de diffusion, d'atténuation, et de résolution spatiale variable ou limitée



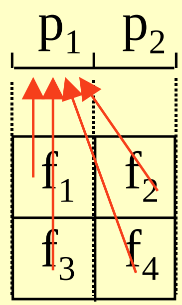
$$p_1 = r_{11} f_1 \exp(-\mu_1 d_1) + r_{13} f_3 \exp(-\mu_3 d_3)$$

Atténuation
si carte des µ disponible



$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4$$

Diffusion
avec modèle de PSF diffusé



$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4$$

Fonction de réponse avec
modèle de FWHM(distance)

Conséquences pratiques

• Rétroprojection filtrée :

✓*association de traitements plus ou moins optimisés pour corriger les phénomènes perturbateurs (diffusion, atténuation)*
e.g., correction de Jaszczak, FBP, puis correction de Chang

• Reconstruction itérative :

✓*approche unifiée, théoriquement la plus plus satisfaisante*
✓*d'où la réputation d'« approche quantitative »*
✓*seule l'atténuation est actuellement facilement intégrée à la reconstruction (modèle théorique exact si la carte de transmission est connue)*

4ème différence : modèles statistiques

- Rétroprojection filtrée :
  - pas de modèle (donc d'hypothèses) concernant la nature des fluctuations statistiques entachant les données

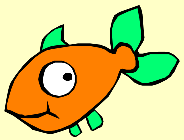
- Reconstruction itérative :
  - possibilité de modéliser et de prendre en compte la nature des fluctuations statistiques affectant les données (Poisson en SPECT par exemple), par une interprétation probabiliste du problème

  e.g., MLEM (Maximum Likelihood Expectation Maximization) ou OSEM (version accélérée de MLEM) :

  Modèle : Les p_k sont des variables aléatoires de Poisson de paramètres $\overline{p_k}$, d'où l'expression de la vraisemblance de **f** :

$$\mathrm{prob}(\mathbf{p}|\mathbf{f}) = \prod_k \exp(-\overline{p_k}) \,.\, \overline{p_k}^{\,p_k} / \, p_k\,!$$

  Solution : solution **f** maximisant la vraisemblance (ou log-vraisemblance), i.e., prob(**p**|**f**)



Conséquences pratiques

• Rétroprojection filtrée :

✓*l'information concernant la nature du bruit n'est pas exploitée (approche donc moins puissante théoriquement)*

• Reconstruction itérative :

✓*les projections traitées devraient respecter les hypothèses de la méthode itérative utilisée*

- ➢ *MLEM et OSEM : projections suivant une statistique de Poisson*
- ➢ *méthodes de gradient conjugué : projections gaussiennes*

✓*utilisée souvent sans que ces conditions soient vérifiées (si les données ont été pré-traitées par exemple)*

FAQ …

• Pourquoi MLEM et OSEM marchent-ils si bien même quand les données ne suivent pas une statistique de Poisson ? Par exemple, si on effectue une correction de la diffusion par Jaszczak ...

Formule de MLEM :

$$f^{\,n+1} = f^{\,n} \,.\, \underbrace{R^t}_{\text{opérateur de rétroprojection}} \,[\, \underbrace{\mathbf{p} / p^n}_{\text{erreur}} \,]$$

- solution toujours positive ou nulle si $f^{\,0}$ est positif
- nombre d’événements conservé au fil des itérations

Ces contraintes de positivité et de support expliquent en grande partie la puissance de MLEM

5ème différence : introduction d'a priori

• Rétroprojection filtrée :

- pas de possibilité d'introduction de connaissances a priori

• Reconstruction itérative :

- possible introduction de connaissances a priori au moyen des techniques de régularisation :
  - ➢ solution non régularisée : minimisation d'une distance d entre **p** et R**f**
  - ➢ solution régularisée : minimisation de $d(\mathbf{p},R\mathbf{f}) + \lambda d_2(\mathbf{f},\mathbf{f_a})$: la solution est un compromis entre la fidélité aux mesures et l'a priori

- exemples d'a priori régularisants :
  - ➢ image lisse
  - ➢ image présentant des discontinuités

Conséquences pratiques

• Rétroprojection filtrée :

✓*aucune connaissance a priori n’est introduite*

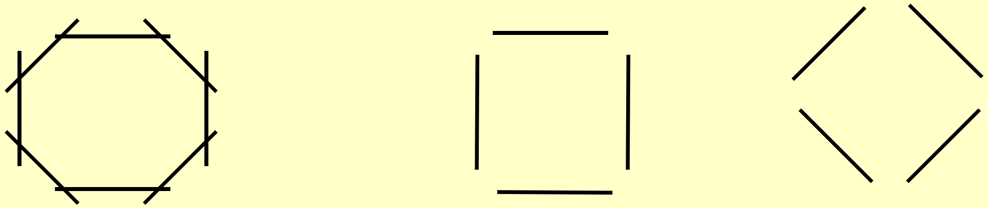
• Reconstruction itérative :

✓*aucune connaissance a priori n’est introduite dans les logiciels cliniques (sauf la positivité de la solution pour MLEM et OSEM), bien que l’intérêt ait été démontré en recherche*

6ème différence : temps de calcul

- Rétroprojection filtrée :
  - rapide, sauf en PET 3D…

- Reconstruction itérative :
  - long sauf pour les versions accélérées (OSEM)
  - principe de OSEM : tri des projections en sous-ensembles :



8 projections → 2 sous-ensembles de 4 projections

it. 1
- ➢ estimation de f^1 à partir de f^0 et des projections p^1 appartenant au sous-ensemble 1 : $f^1 = f^0 . R^t [\mathbf{p} / p^1]$
- ➢ estimation de f'^1 à partir de f^1 et des projections p'^1 appartenant au sous-ensemble 2 : $f'^1 = f^1 . R^t [\mathbf{p} / p'^1]$

it. 2
- ➢ estimation de f^2 à partir de f'^1 et des projections p^2 appartenant au sous-ensemble 1 : $f^2 = f'^1 . R^t [\mathbf{p} / p^2]$
- ➢ estimation de f'^2 à partir de f^2 et des projections p'^2 appartenant au sous-ensemble 2 : $f'^2 = f^2 . R^t [\mathbf{p} / p'^2]$

etc.

Conséquences pratiques

• Rétroprojection filtrée :

✓*toujours gagnant*

• Reconstruction itérative :

✓*l'argument « temps de calcul » n'est plus justifié pour les versions accélérées type OSEM utilisées sans correction autre que la correction d'atténuation*

✓*si modélisation complète des phénomènes perturbateurs (en particulier diffusion et réponse du détecteur), le temps de calcul redevient problématique…*

✓*OSEM : nombre de sous-ensembles = facteur d'accélération*

✓*OSEM : nb de sous-ensembles x nb d'itérations ~ nb d'itérations MLEM*

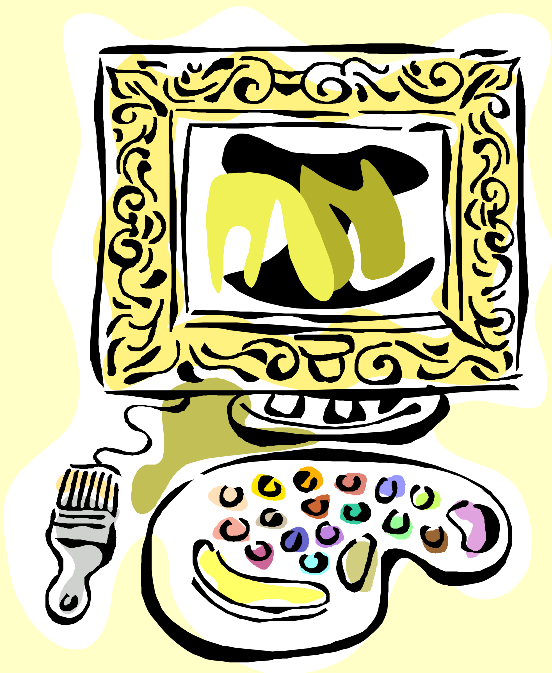
Bilan : FBP vs reconstruction itérative

	FBP	**méthodes itératives**
Généralité d'utilisation	-	+ (données tronquées)
Paramètres	+ (filtrages maîtrisées)	- (expérience limitée)
Corrections	- (combinaisons ad-hoc)	+ (naturellement intégrées)
Modèle statistique	- (non exploitation d'a priori)	+ (naturellement intégré)
A priori	- (non exploitables)	+ (via régularisation)
Temps de calcul	+	- (sauf versions accélérées)

La lutte s'annonce serrée…

✓*Surtout des avantages pratiques pour FBP, et beaucoup d'avantages théoriques pour les méthodes itératives ...*

Quelques clefs
pour mieux comprendre …



Caractéristiques du bruit dans les images reconstruites (SPECT)

Amplitude du bruit en fonction de la valeur des pixels (sans correction d'atténuation)

Hann 0,3

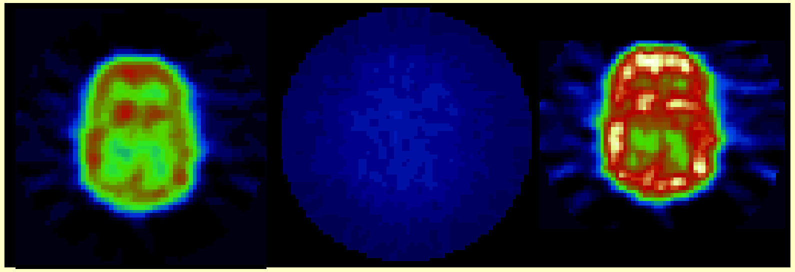


image écart-type RSB

OSEM 24 it.

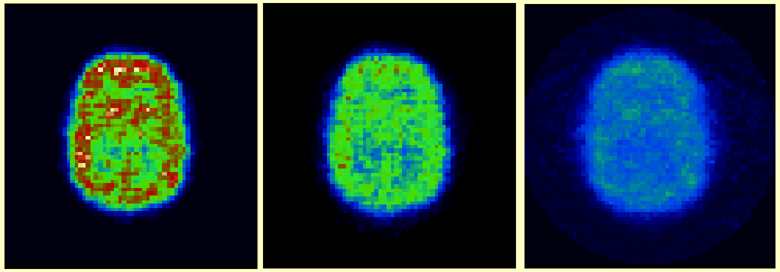
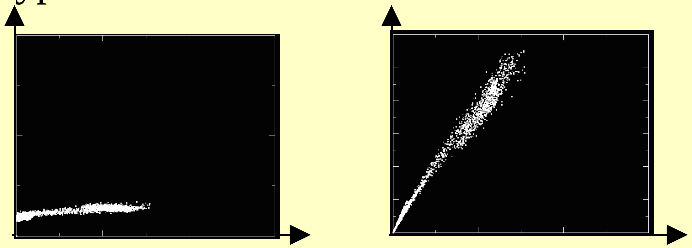


image écart-type RSB

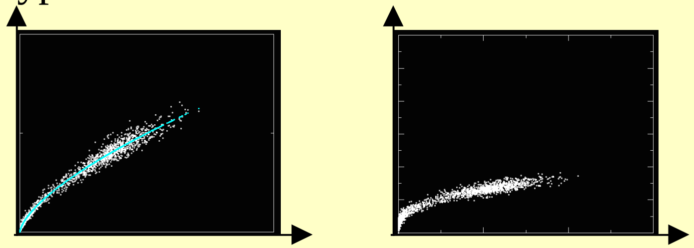
✓Avec FBP, l'écart-type (le bruit) est relativement constant dans toute l'image, tandis qu'avec OSEM (MLEM), il est fortement corrélé à la valeur du pixel

écart-type RSB



valeur du pixel valeur du pixel

écart-type RSB



valeur du pixel valeur du pixel

✓Avec FBP, le rapport signal-sur-bruit (RSB) augmente avec la valeur du pixel, tandis qu'avec OSEM, il est relativement constant dans toute l'image

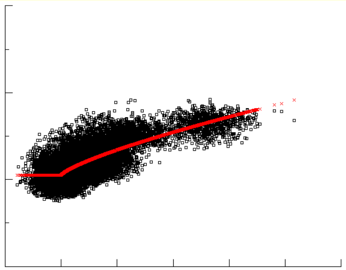
Buvat et al, J. Nucl. Med. 42: 138P, 2001

Caractéristiques du bruit dans les images reconstruites (SPECT)

Effet du filtre avec FBP

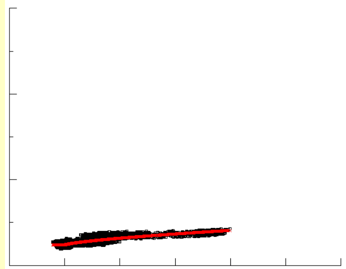
Rampe 0,5

écart-type



valeur du pixel

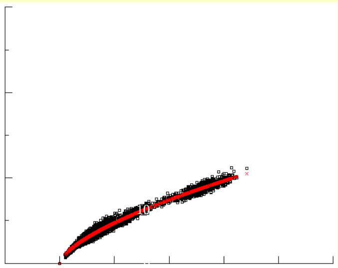
Hann 0,3



✓Avec FBP, le filtre affecte l'amplitude de l'écart-type (donc du rapport signal-sur-bruit), mais peu sur la forme de la relation entre écart-type et valeur du pixel

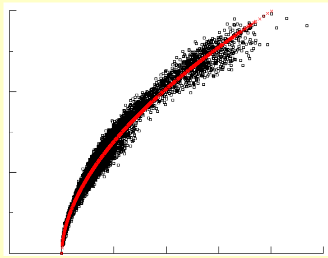
OSEM 24

écart-type



valeur du pixel

OSEM 400



✓Avec OSEM, le nombre d'itérations affecte l'amplitude de l'écart-type, mais peu la forme de la relation entre écart-type et valeur du pixel

Buvat et al, J. Nucl. Med. 42: 138P, 2001

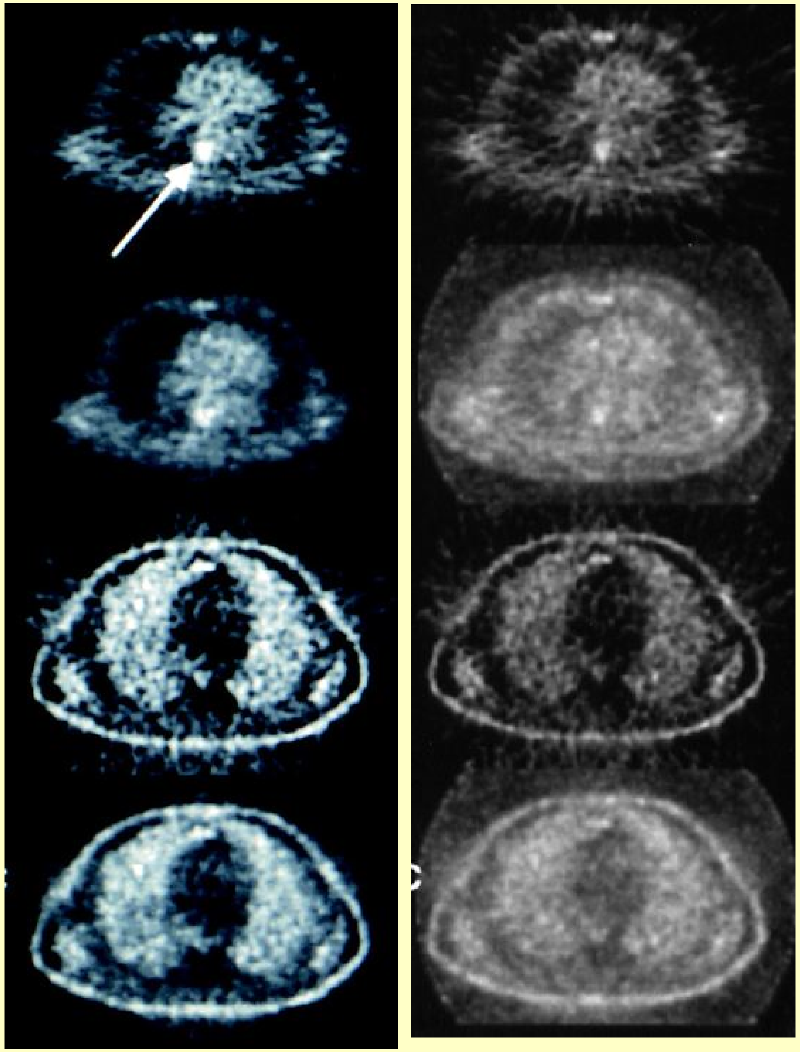
Conséquences pratiques : détection d'hyperfixations en PET

FBP-AC

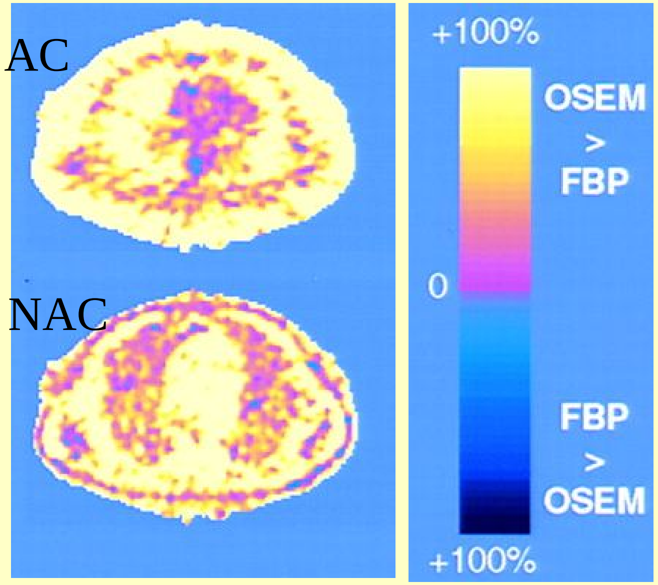
OSEM-AC

FBP-NAC

OSEM-NAC



RSB



Amélioration du RSB

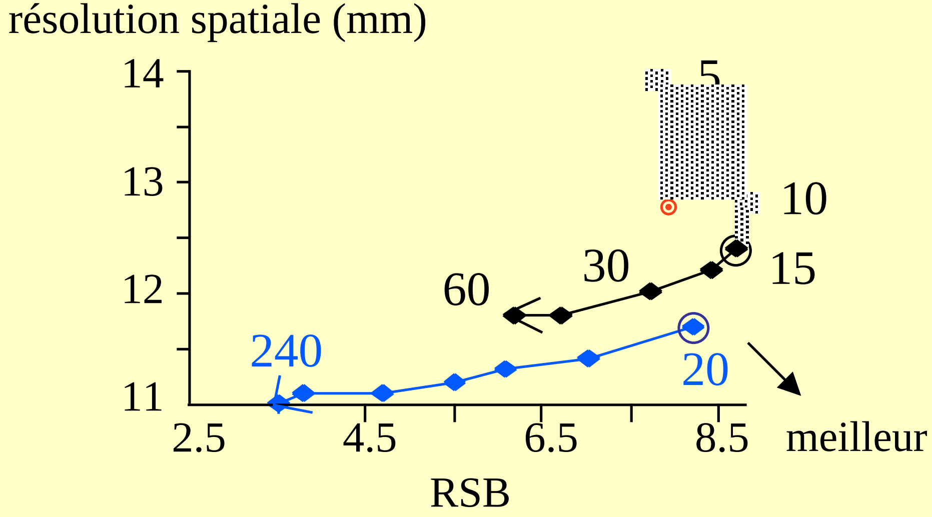
OSEM > FBP dans les régions faiblement actives
FBP > OSEM dans les régions hyperfixantes :

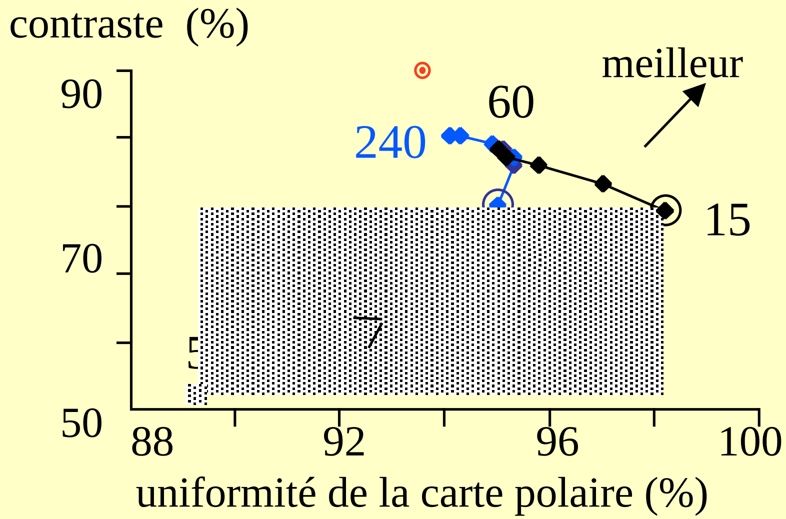
Affecte la détection des lésions

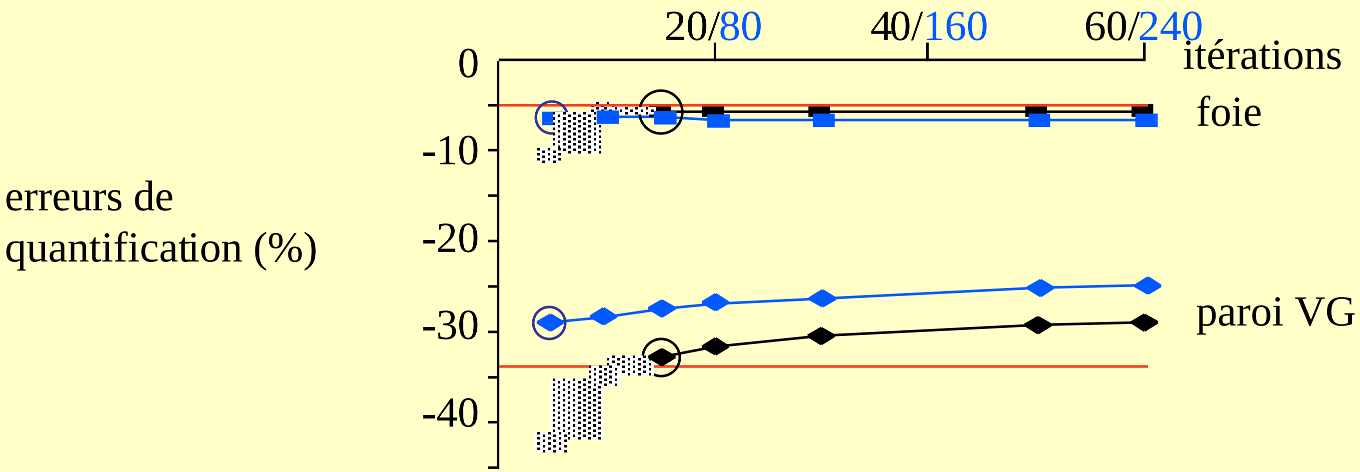
Riddell et al, J. Nucl. Med. 42: 1316-1323, 2001

Impact de la technique de reconstruction : données SPECT non atténuées

MLEM, OSEM, FBP







L'algorithme de reconstruction affecte essentiellement le compromis résolution spatiale/RSB, et affecte peu les mesures quantitatives (sauf via l'effet de volume partiel)

Buvat et al, J. Nucl. Med. 40: 148P, 1999

Comment comparer objectivement les 2 approches ?

• Etude quantitative

- Chaque méthode doit d'abord être optimisée
- Les deux méthodes optimisées peuvent ensuite être comparées

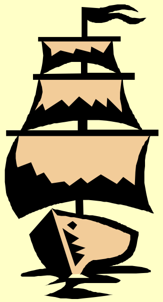
• Etude visuelle

- Chaque méthode doit d'abord être optimisée
- Une phase d'apprentissage est indispensable
- Méthodologie de comparaison complexe à mettre en œuvre (LROC)

• Biais d'évaluation classiques

- Une mesure du bruit dans une région uniforme n'est pas un bon critère d'évaluation, car le bruit n'est pas distribué uniformément dans les images pour OSEM
- Comparer des images comparables, e.g., :
  - ➢ le RSB pour des images présentant la même résolution spatiale
  - ➢ la quantification pour des images présentant le même RSB
- Extrapolation de résultats numériques à des performances de détection : l'amélioration du RSB n'implique pas forcément l'amélioration des performances de détection

Conclusion théorique



- Reconstruction itérative potentiellement plus puissante que FBP si :
  - les avantages qu'elle présente sont exploités :
    - ➢ réalisation des corrections (atténuation, diffusion, réponse du détecteur)
    - ➢ introduction d'a priori via la régularisation
  - elle est utilisée de façon optimisée comme FBP :
    - ➢ optimisation des paramètres de reconstruction
    - ➢ adaptation des paramètres de reconstruction à la problématique

- La démonstration d'une potentielle supériorité diagnostique de la reconstruction itérative nécessite :
  - des études lourdes (particulièrement en recherche clinique)
  - de considérer les corrections (atténuation en particulier) en plus du processus de reconstruction