

RECONSTRUCTION DES IMAGES TOMOGRAPHIQUES PAR RETROPROJECTION FILTRÉE

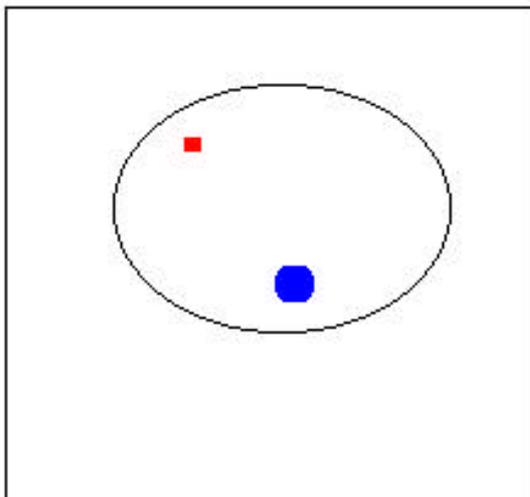
F. DUBOIS
 CHU Saint Etienne

Acquisition tomographique

Les caméras tomographiques (1) permettent d'acquérir un ensemble d'images par rotation d'un demi-tour ou d'un tour complet autour d'une région d'un sujet. Chacune de ces images est appelée projection. Elle correspond à la projection sur un plan de la répartition de la radioactivité de la région étudiée. D'autres phénomènes physiques s'ajoutent: la perte de résolution avec la profondeur, l'atténuation du rayonnement dans l'organe, la diffusion COMPTON et enfin le bruit (2). Ces phénomènes font l'objet des articles suivants et nous n'étudierons ici que la reconstruction tomographique avec collimateur parallèle dans un milieu supposé non atténuant et non diffusant et sans perte de résolution avec la profondeur. Différentes techniques (2) peuvent être utilisées pour reconstruire les coupes tomographiques. Nous allons étudier la méthode de la rétroprojection-filtrée.

Théorie de la rétroprojection filtrée

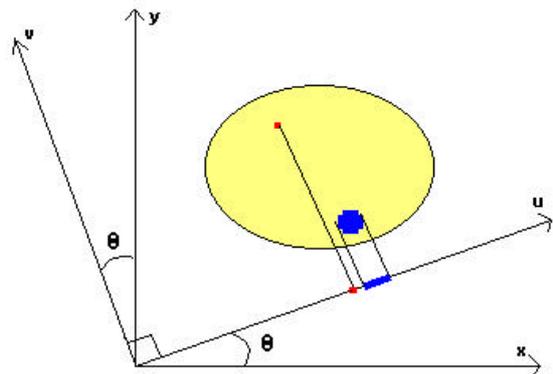
Considérons (Figure 1) la coupe d'un organe qui contient deux foyers radioactifs.



-Figure 1-
 : Exemple de coupe transversale d'un organe contenant deux foyers radioactifs.

Mathématiquement, on peut définir la distribution radioactive comme une fonction $f(x,y)$ qui en chaque point de coordonnée (x,y) du plan de coupe donne la valeur de la concentration radioactive. La tête de la caméra va tourner autour de l'organe et à chaque pas d'acquisition enregistrer une image dont une ligne horizontale correspond à la projection de la coupe précédente (Figure 2). A une ligne de projection faisant un angle θ avec l'axe x , correspond une fonction $p(u,\theta)$ qui en tout point de coordonnée u de la projection fait correspondre la somme de toutes les activités rencontrées sur un axe v perpendiculaire à l'axe u :

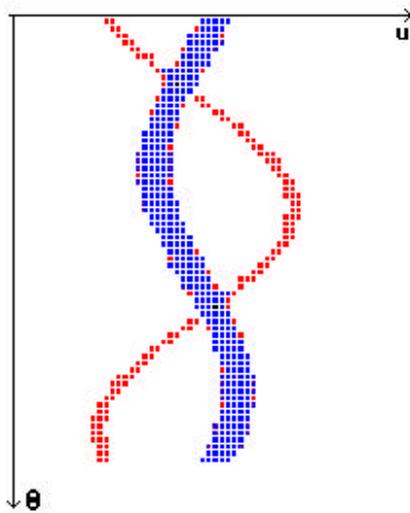
$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv$$



-Figure 2-
 Projection selon un angle q

C'est au niveau de cette équation que l'on pourrait prendre en compte les différents phénomènes physiques ajoutés qui ont été évoqués précédemment. En pratique, on utilise pour l'acquisition des images numérisées de taille $N \times N$. La taille N choisie est un compromis entre la résolution (qui doit respecter le théorème de SHANNON) et la statistique de comptage (présence d'un bruit suivant une loi de POISSON). On utilise le plus souvent, des matrices 64×64 ou 128×128 . De même le nombre d'angles de rotation n'est pas infini. On prend sur 360° , un nombre de projections N identique à la taille de la matrice, afin que la résolution angulaire soit égale à la résolution spatiale (4) (5)(8).

En l'absence d'atténuation, deux projections opposées sont identiques et la rotation peut se faire sur seulement 180°. Lorsque l'organe est superficiel, comme le cœur, on se contente d'une rotation sur 180° (6) (7) et 32 projections d'images 64 x 64 suffisent pour reconstruire les coupes tomographiques. Pour étudier des structures plus profondes, il est nécessaire du fait de l'atténuation d'effectuer une rotation sur 360°. L'ensemble des lignes de projection acquises peuvent être mises les unes en dessous des autres en fonction de la valeur de l'angle θ . Cette représentation s'appelle le sinogramme (Figure 3). Une source de radioactivité va se déplacer dans cette représentation selon une courbe de type sinusoïdal. L'examen de ce sinogramme peut mettre en évidence des mouvements du sujet par rupture d'une variation sinusoïdale. En cas de rotation sur 360°, un prétraitement consistant à calculer la moyenne géométrique (racine carrée du produit) de deux projection opposées peut être effectuée. Il permet une première approche de la correction d'atténuation avec la profondeur si on suppose que le coefficient d'atténuation du rayonnement est le même en tout point.

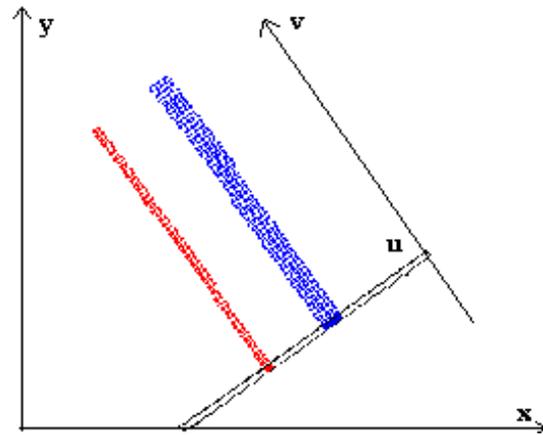


-Figure 3 -
Sinogramme d'acquisition

Rétroprojection simple ou épandage

La première idée pour reconstituer la coupe tomographique à partir de l'ensemble des projections est d'épandre (ou de rétroprojeter) sur la portion de plan les valeurs de la projection. On fait l'hypothèse que la projection a été obtenue par une distribution uniforme par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe de projection (Figure 4) selon l'équation :

$$f^*(x,y) = p(u,q) \text{ avec } u = x.\cos q + y.\sin q$$

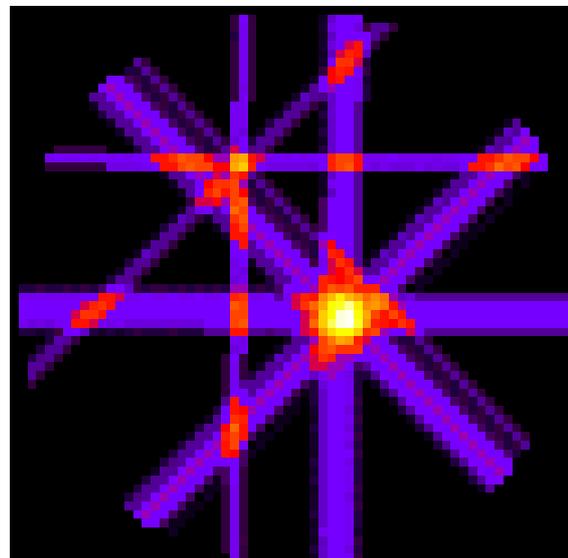


-Figure 4-
Epandage d'une projection

On peut faire de même progressivement en sommant les différentes projections selon les différents angles de 0 à π selon :

$$f^*(x,y) = \int_0^\pi p(u,q)$$

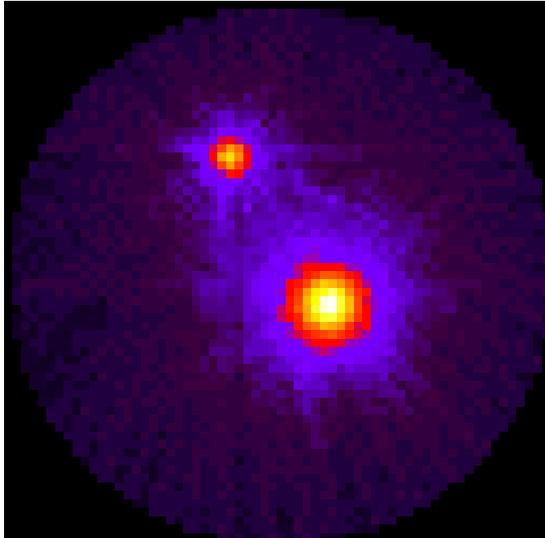
Au fur et à mesure des épandages, on voit s'ajouter les zones où figurent de l'activité (Figure 5).



-Figure 5-
Epandage selon 4 directions

Mais aussi, il persiste les résidus de l'épandage dans les zones où n'existe aucune activité. Ces résidus constituent ce qu'on appelle les artéfacts en étoile. Lorsque toutes les projections ont été effectuées (Figure 6).

Ces artefacts en étoile déforment énormément le résultat et il n'est pas possible d'obtenir une image correcte par simple rétroprojection. Pour obtenir une reconstruction tomographique, nous devons utiliser une méthode qui permette l'élimination de ces artefacts en étoile. Pour cela, nous allons étudier le transformée de FOURIER d'une image.



- Figure 6 -
Epannage selon l'ensemble des directions

Transformée de FOURIER d'une image

La transformée de FOURIER $F(v)$ d'une fonction spatiale $f(x)$ ou temporelle $f(t)$ est une transformation mathématique qui décompose toute fonction en une somme infinie de fonctions sinusoidale selon :

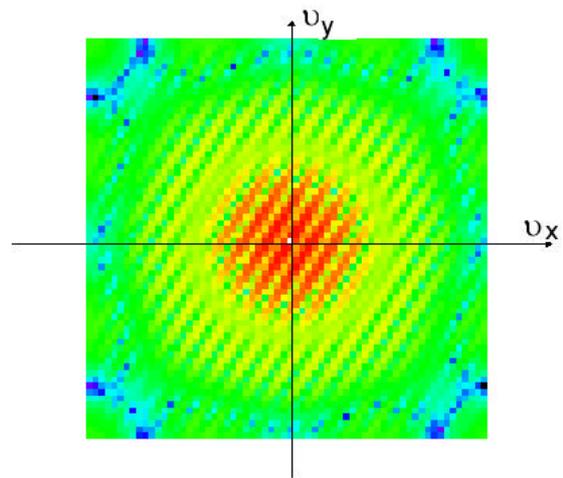
$$F(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi nx} dx$$

La transformée de FOURIER d'une fonction spatiale de x , dépend de la variable v appelée fréquence spatiale qui s'exprime en l'inverse d'une longueur (m^{-1} ou en cycles/m). Les valeurs de la transformée de FOURIER sont des nombres complexes ayant un module et un argument. La transformée de FOURIER d'une fonction réelle est paire. On peut appliquer la transformée de FOURIER à chaque ligne d'une image et ensuite sur le résultat obtenu, appliquer une nouvelle fois une transformée de FOURIER mais cette fois-ci colonne par colonne. On obtient alors une transformée de FOURIER bidimensionnelle de l'image.

$$F(n_x, n_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi(xn_x + yn_y)} dx dy$$

Une transformée de FOURIER bidimensionnelle dépend de deux fréquences spatiales v_x et v_y . On peut représenter sous forme d'une image le module de la transformée de FOURIER bidimensionnelle d'une image scintigraphique. L'image obtenue, éventuellement présentée selon une échelle logarithmique (Figure 7) est symétrique par rapport à l'origine (parité de la transformée de FOURIER d'une image réelle). Le point situé à l'origine représente comme précédemment la composante continue, c'est à dire l'activité moyenne par pixel. Tout autour de l'origine figurent les composantes de basse fréquence. Elle représente des variations de grande période. Ces composantes portent l'information de la structure générale de l'image. Un peu plus en périphérie figurent les termes de moyenne fréquence traduisant des variations plus rapides. Elles portent une information de détail sur l'image et ont de ce fait le plus grand intérêt. En périphérie figurent les termes de hautes fréquences. Ils représentent des variations très rapides d'un pixel à l'autre. C'est dans ce domaine que l'on rencontre les composantes liées au bruit statistique de l'image du fait des fluctuations poissonniennes de la radioactivité (9). Du fait de la numérisation, la fréquence maximale que l'on peut obtenir n'est pas infinie. Elle s'appelle fréquence de NYQUIST v_N et est égale à la moitié de l'inverse du pas de numérisation Δx

$$n_N = \frac{1}{2 \cdot \Delta x}$$



- Figure 7 -
Module de la transformée de FOURIER de l'image précédente (échelle logarithmique)

Théorème de la coupe centrale

Nous avons vu qu'une projection pouvait mathématiquement s'écrire sous la forme :

$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv$$

Calculons la transformée de FOURIER $P(v, \theta)$ de cette projection :

$$P(n, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, \theta) \cdot e^{-i2pnu} du$$

En remplaçant $p(u, \theta)$ par sa valeur, nous avons :

$$P(n, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2pnu} du$$

Les formules de transformations polaires nous donnent :

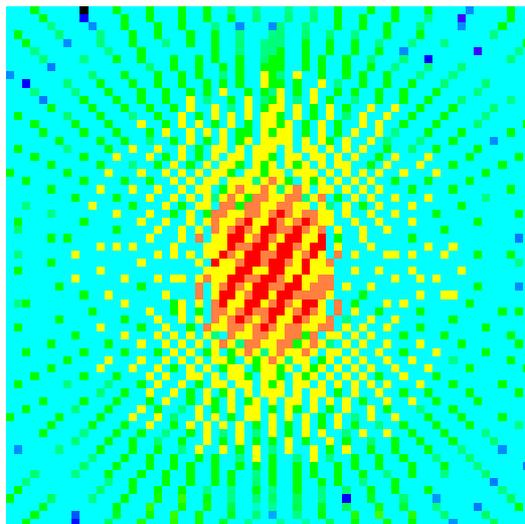
$$nu = n(x \cos q + y \sin q) = x(n \cos q) + y(n \sin q) = xn_x + yn_y$$

en posant $v_x = v \cos \theta$ et $v_y = v \sin \theta$. Par ailleurs le petit carré différentiel $dv \cdot du$ est égal à $dx \cdot dy$. Finalement, nous avons :

$$P(n, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2p(xn_x + yn_y)} dx dy$$

La double intégrale n'est autre que la transformée de FOURIER bidimensionnelle de l'image. Nous venons de démontrer le théorème de la coupe centrale qui s'énonce : La transformée de FOURIER d'une projection correspond à une ligne de la transformée de FOURIER de l'image qui passe par l'origine et fait un angle θ avec l'axe des abscisses.

$$P(n, q) = F(n_x, n_y)$$



-Figure 8-

Théorème de la coupe centrale. Les transformées de FOURIER des différentes projections (ici 32) ne remplissent pas complètement l'espace fréquentiel

Cette méthode permet théoriquement de reconstruire la coupe tomographique. On calcule la transformée de FOURIER de chaque projection. On reporte les valeurs dans le plan fréquentiel et une transformée de FOURIER inverse donne la coupe tomographique. Cette méthode souffre toutefois d'un gros défaut. Le nombre de projection n'est pas parfait surtout pour les hautes fréquences. Il persiste des vides (**Figure 8**) qu'il faut remplir par interpolation à partir des points les plus proches et ce sur des nombres complexes. Le calcul des transformations de FOURIER ainsi que le calcul des interpolations en font une méthode longue et en pratique inutilisée. Une autre méthode plus rapide doit donc être utilisée.

Rétroprojection filtrée

Considérons la transformée de FOURIER inverse qui à partir de l'espace fréquentiel nous redonne la coupe tomographique :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(n_x, n_y) e^{i2p(xn_x + yn_y)} dn_x dn_y$$

Le théorème de la coupe centrale nous permet d'introduire la transformée de FOURIER des projections :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(n, q) e^{i2p(xn_x + yn_y)} dn_x dn_y$$

En reprenant

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad \text{et} \quad u = x \cos q + y \sin q,$$

nous pouvons faire le changement de variable en remplaçant $dn_x dn_y$ par $n dn dq$ en utilisant le Jacobien de la transformation. Les bornes d'intégration pour la variable θ deviennent 0 et 2π . Du fait de la symétrie par rapport à l'origine, le point (v, θ) a la même valeur que le point $(-v, \theta + \pi)$. On peut donc, pour parcourir le plan fréquentiel, utiliser la valeur absolue de v et faire varier θ de 0 à π . L'équation précédente devient :

$$f(x, y) = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} P(n, q) |n| e^{i2pnu} dn dq$$

L'intégrale interne $\int_{0}^{+\infty} P(n, q) |n| e^{i2pnu} dn$

est la transformée FOURIER inverse de la transformée de FOURIER de la projection multipliée par la valeur absolue de v . Cette quantité est appelée une projection filtrée $\hat{p}(u, q)$.

Il est donc possible de reconstruire $f(x,y)$ par :

$$f(x,y) = \int_0^p \hat{p}(u,q) dq$$

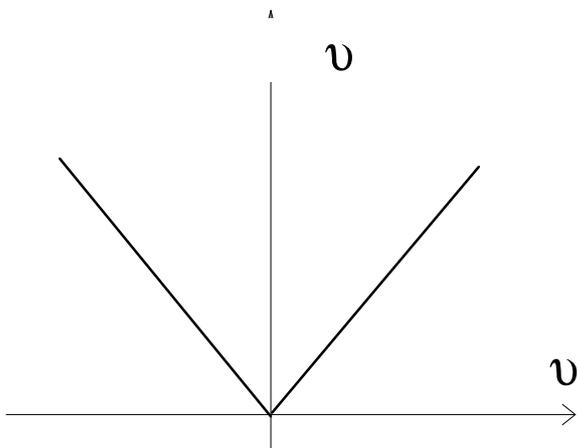
qui n'est autre que la rétroprojection des projections filtrées.

Le filtre rampe

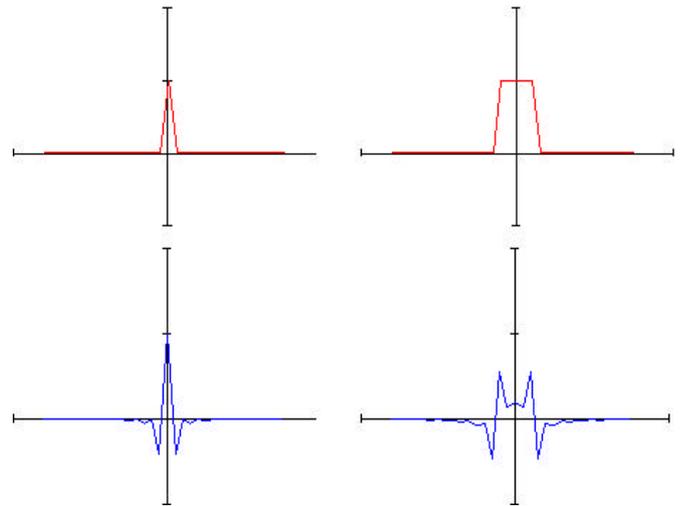
Le principe de la rétroprojection filtrée nécessite de multiplier la transformée de FOURIER des projections par la valeur absolue de v que l'on appelle filtre rampe (**Figure 9**). Ce filtre met à zéro la composante continue et donc introduit des valeurs négatives (la composante continue représente la moyenne du signal). Il amplifie de plus en plus les fréquences élevées et donc génère dans le signal des transitions rapides. En pratique, à partir d'un signal ponctuel ou non (**Figure 10**), le filtrage rampe introduit de part et d'autre de l'objet filtré des valeurs négatives. Le rôle de ces valeurs négatives est d'effacer progressivement les artefacts en étoile laissés par les autres projections lors de l'opération d'épandage. Il est possible d'éviter le calcul des transformée de FOURIER des projections en utilisant le théorème de PLANCHEREL qui spécifie que la transformée de FOURIER d'un produit de convolution de deux fonctions est égal au produit simple de leur transformée de FOURIER :

$$TF[f(x)*g(x)] = TF[f(x)] \cdot TF[g(x)]$$

Il est donc possible de remplacer le produit par $|n|$ dans le domaine fréquentiel par une convolution dans le domaine réel.(10)



- - Figure 9 -
- Filtre rampe



- Figure 10 -
Rétroprojection filtrée
- En haut: signal d'origine. En bas: signal filtrée

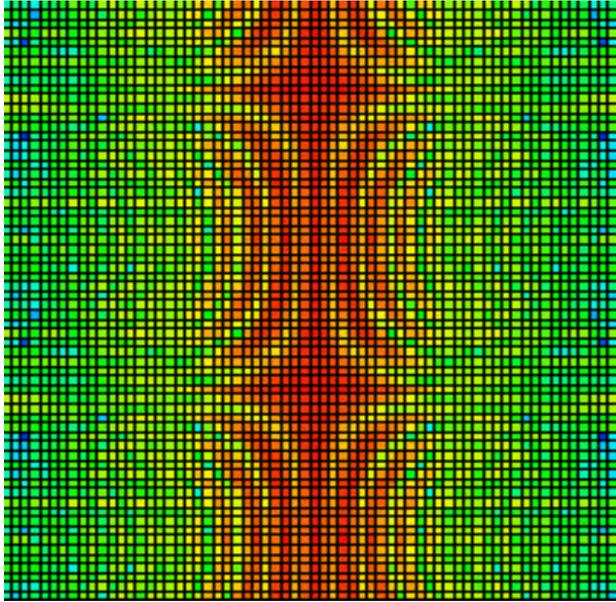
Au total, le processus de calcul est le suivant :

1. Eventuellement calcul de la moyenne géométrique des projections opposées.
2. Soit calcul des transformée de FOURIER des projections (Figure 9), multiplication par $|n|$ (Figure 10) et calcul par transformée de FOURIER inverse de la projection filtrée (Figure 11)
3. Soit calcul du produit de convolution des valeurs de la projection par le filtre rampe obtenu à partir de la transformée de FOURIER inverse de $|n|$ (**Figure 11**)
4. Epandage des projections filtrées (**Figure 12**).

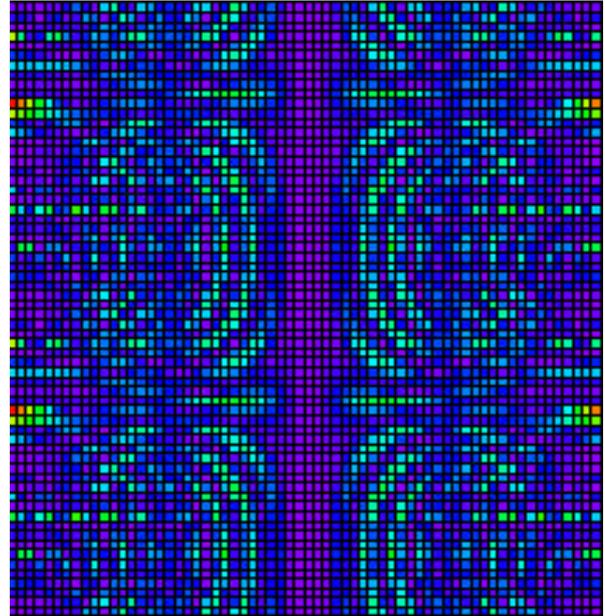
La reconstruction est nettement plus correcte, cependant si le nombre de projection n'est pas suffisamment grand,, il persiste de très légers artefacts en étoile. Il en est de même si une source de haute activité est présente dans la coupe.

Filtrage lissant

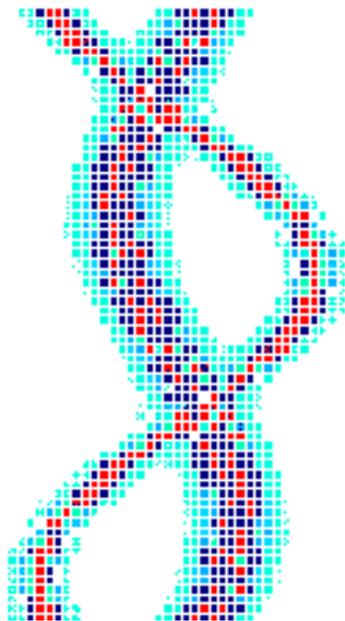
Le filtrage rampe pose néanmoins un énorme problème. Il amplifie de manière très importante les hautes fréquences (**Figure 15**). Il est nécessaire de



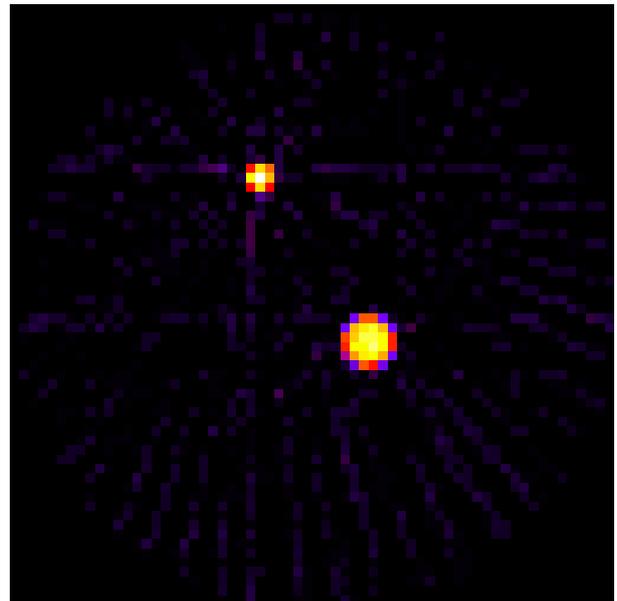
- Figure 11 -
- Transformée de FOURIER des projections



- Figure 12 -
- Multiplication par le filtre rampe

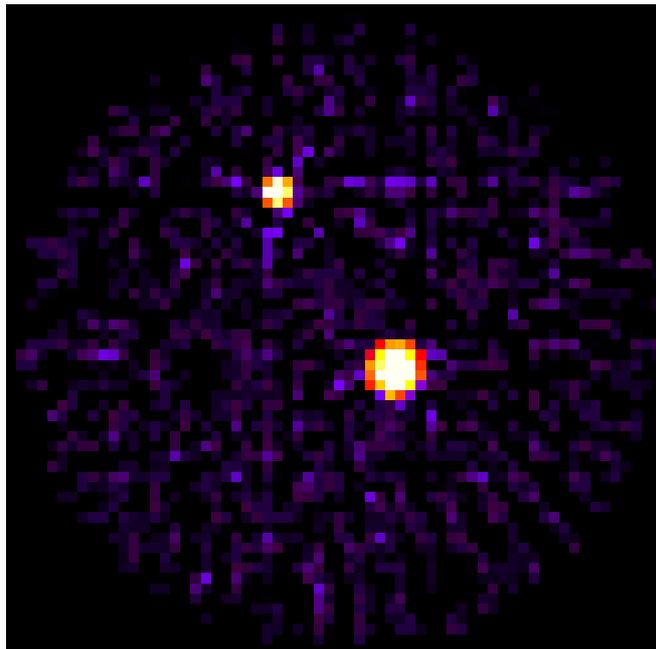


- Figure 13 -
- Sinogramme des rétroprojections filtrées
- Noter la présence de valeurs négatives (en bleu)
- De chaque côté des sinusoi des



- Figure 14 -
- Epannage des rétroprojections filtrées

réduire le bruit. On le fait en associant un filtrage de type lissant.



- Figure 15 -

- Rétroprojection filtrée d'un objet bruité

Ce filtrage peut être effectué (11) selon quatre possibilités :

- 1 Multiplication du filtre rampe par un filtre lissant lors de la phase de reconstruction
- 2 Filtrage préalable de l'image par un filtre lissant 2D, puis reconstruction par un filtre rampe
- 3 Reconstruction par un filtre rampe, puis filtrage des coupes par un filtre lissant 2D
- 4 Reconstruction par un filtre rampe, puis filtrage du volume reconstruit par un filtre 3D.

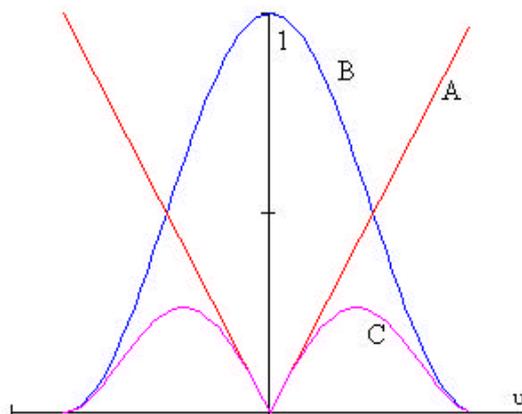
La méthode 1, modifiant le filtre rampe est la plus rapide. Par contre le lissage s'effectue seulement en une dimension (la ligne que l'on rétroprojette). Il est préférable de lisser soit les projections par un filtre en deux dimensions ou de filtrer les coupes ou le volume obtenu en deux ou trois dimensions pour obtenir le meilleur lissage. Par contre le temps de calcul est augmenté.

Les filtres lissants utilisés sont soit toujours du type passe-bas. Ils éliminent les hautes fréquences caractéristiques du bruit. Le plus classique est le filtre de HANN (12). Il correspond à une fonction cosinus dans l'espace fréquentiel. Sa formule est :

$$F(n) = \begin{cases} 0,5 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi n}{2 n_c} \right) \right) & \text{si } n < n_c \\ 0 & \text{si } n \geq n_c \end{cases}$$

v_c est appelée fréquence de coupure. Plus elle est basse, plus le filtre est lissant (Figure 16). Ce filtre a été le plus utilisé, car si on prend $v_c = v_N$, le filtre de HANN ou HANNING prend une forme simple dans le domaine réel. Il prend la valeur du filtre de convolution :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en 1 D ou de } \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en 2 D.}$$



-Figure 16- Filtrage lissant.

A = filtre rampe, B = filtre de HANN, C = Produit du filtre rampe par le filtre de HANN

Ce filtre permet des calculs extrêmement rapides et il était en pratique le seul utilisé sur les calculateurs d'il y a quelques années. Il a pour inconvénient d'être fortement lissant et de modifier les moyennes fréquences. Il y a donc une perte de détail et donc de résolution. D'autres filtres ont été utilisés comme le filtre de HAMMING, de PARZEN ou ceux de SHEPP et LOGAN. Le filtre de BUTTERWORTH (12) dépend de deux paramètres : la fréquence de coupure ((15) définie comme la fréquence pour laquelle la valeur du filtre est de 0,707 et l'ordre du filtre (9) qui détermine la rapidité de décroissance dans les hautes fréquences. Sa formule est la suivante :

$$F(n) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{n}{n_c} \right)^{2p} \right)^{1/2}}$$

Correctement paramétré, il préserve les moyennes fréquences et donc la résolution. C'est maintenant le filtre le plus recommandé. Il est possible d'utiliser d'autres filtres. Des filtres contrastants qui amplifient les moyennes fréquences, comme le filtre gaussien.(14) L'amplification des moyennes fréquences peut avoir pour but de corriger la dégradation de la résolution par le système de

détection. Ce sont des filtres de restauration utilisant la fonction de transfert de modulation du système de détection. C'est le cas du filtre de METZ (13)(12) et du filtre de WIENER (15) (16) (17). La fonction de transfert de modulation peut être soit mesurée (18), soit estimée à partir de la résolution du système. La détermination de la fréquence de coupure dépend du niveau du bruit statistique. On doit utiliser un filtre ayant une grande fréquence de coupure pour une image ayant une grande statistique de comptage et inversement pour une avec une faible statistique. La fréquence à partir de laquelle le bruit devient dominant peut être déterminée par l'étude du spectre de puissance de l'image dans le domaine fréquentiel (19)(20)(21) Une étude d'images de SPECT par courbes ROC (12) a montré pour la qualité des images le classement suivant: METZ > BUTTERWORTH > HANN.

Conclusion

La reconstruction des coupes tomographiques par rétroprojection filtrée reste la méthode la plus utilisée. Elle a pour principal avantage la rapidité. L'utilisation conjointe de filtre correctement lissant ou contrastant permet d'avoir une bonne qualité d'image. La méthode ne permet toutefois pas l'élimination complète d'artéfacts de reconstruction qui peuvent parfois être gênants. Cette méthode peut servir de détermination initiale pour les méthodes itératives.

Bibliographie

- BROOK R.A., DICHIRO G. Principles of computer assisted tomography in radiographic and radioisotope imaging. *Phys. Med. Biol.* (1976) 21: 689-732
- BLOKLAND K., REIBE H., PAUWELS E. Quantitative analysis in single photon emission tomography. *Eur. J. Nucl. Med.* (1992) 19 :47-61
- JATTEAU M., BERCHE C. Review of image reconstruction techniques in medical transaxial computed tomography. *Ann. Radiol.* (1983) 26 :13-22
- VANDROUX J.C., BECK C. La tomographie d'émission monophotonique. *Bulletin de L'ACOMEN.* (1986) 1 : 3-32
- MORETTI J.L., RAYNAUD C. La tomoscintigraphie monophotonique. *J. de Médecine Nucléaire et Biophysique.* (1988) 14 : 245-269
- EISNER R., NOWAK D., PETTIGREW R., FAJMAN W. Fundamentals of 180° acquisition and reconstruction in SPECT imaging. *J. Nucl. Med.* (1986) 27 :1717-1728
- EISNER R., NOWAK D., TETTIGREW R., FAJMAN W. Fundamentals of 180 degree acquisition and reconstruction in SPECT imaging. *J. Nucl. Med.* (1986) 27 :1717-1728
- GO R., MacINTYRE W., HOUSER T., PANTOJA M., O'DONNELL J., FEIGLIN D., SUFKA B., UNDERWOOD D., MEANEY T. Clinical evaluation of 360 degrees and 180 degrees data sampling techniques for transaxial SPECT thallium-201 myocardial perfusion imaging. *J. Nucl. Med.* (1985) 26 :695-706
- KAY D., KEYES J., SIMON W. Radionuclide tomographic image reconstruction using fourier transform techniques. *J. Nucl. Med.* (1974) 15 :951-986
- MILLER T., SAMPATHKUMARAN K. Digital filtering in nuclear medicine. *J. Nucl. Med.* (1982) 23 :66-72
- MILLER T., WALLIS J., WILSON A. Interactive reconstruction in single-photon tomography. *Eur. J. Nucl. Med.* (1989) 15 :189-193
- GILLAND B., TSUI B., McCARTNEY W., PERRY J., BERG J. Determination of the optimum filter function for SPECT imaging. *J. Nucl. Med.* (1988) 29 : 643-650
- KING M., PENNEY B., GLICK S. An image-dependent Metz filter for nuclear medicine images. *J. Nucl. Med.* (1988) 29 :1980-1989
- MADSEN M., PARK C. Enhancement of SPECT images by Fourier filtering the projection image set. *J. Nucl. Med.* (1985) 26 :395-402
- LEMORT J.P., BIZAIS Y., DE LARMINAT P. Use of finite memory Wiener filters in scintigram processing. *Eur. J. Nucl. Med.* (1980) 5:447-452
- LINKS J., JEREMY R., DYER S., FRANK T., BECKER L. Wiener filtering improves quantification of regional myocardial perfusion with thallium-201 SPECT. *J. Nucl. Med.* (1990) 31 :1230-1236
- KING M., SCHWINGER R., DOHERTY P., PENNEY B. Two-dimensional filtering of SPECT images using the Metz and Wiener filters. *J. Nucl. Med.* (1984) 25 :1234-1240
- KING M., SCHWINGER R., PENNEY B., DOHERTY P., BIANCO J. Digital restoration of indium-111 and iodine-123 SPECT images with optimized Metz filters. *J. Nucl. Med.* (1986) 27 :1327-1336
- KING M., DOHERTY P., SCHWINGER R., JACOBS D., KIDDER R., MILLER T. Fast count-dependent digital filtering of nuclear medicine images. *J. Nucl. Med.* (1983) 24 :1039-1045
- KING M., GLICK J., PENNEY B., SCHWINGER R., DOHERTY P. Interactive visual optimization of SPECT preconstruction filtering. *J. Nucl. Med.* (1987) 28 :1192-1198
- Kubo N. Restoration filtering based on projection power spectrum for single-photon emission computed tomography. *Kaku Igaku* (1005) 32 :395-403