

---

# Reconstruction tomographique

Irène Buvat  
IMNC - UMR 8165 CNRS  
Orsay

[buvat@imnc.in2p3.fr](mailto:buvat@imnc.in2p3.fr)  
<http://www.guillemet.org/irene>

Octobre 2011

# Plan

---

- Introduction
  - La tomographie
  - Tomographie en transmission
  - Tomographie en émission
  - Spécificité du problème de reconstruction tomographique
- Notions de base
  - Projection
  - Transformée de Radon
  - Sinogramme
- Méthodes de reconstruction analytique
  - Principe
  - Théorème de la coupe centrale
  - Rétroprojection filtrée
  - Filtres
- Méthodes de reconstruction itérative
  - Principe et méthodes
  - Opérateur de projection R
  - Méthodes, MLEM, OSEM, RAMLA
  - Régularisation
- Questions / Discussion

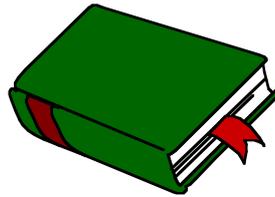
# Avertissement

---

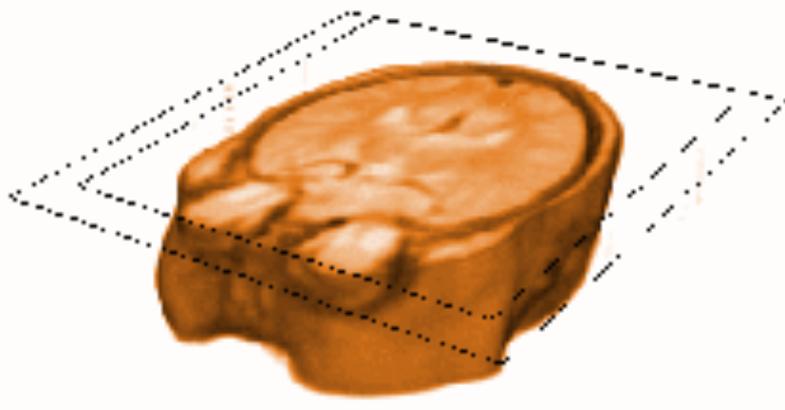


# Introduction : la tomographie

---



- Tomos : coupe, section (grec)
- Graphia : écrire
- Cartographie d'un paramètre interne à un objet, selon un ou plusieurs plans de coupes, à partir de mesures externes et de calculs

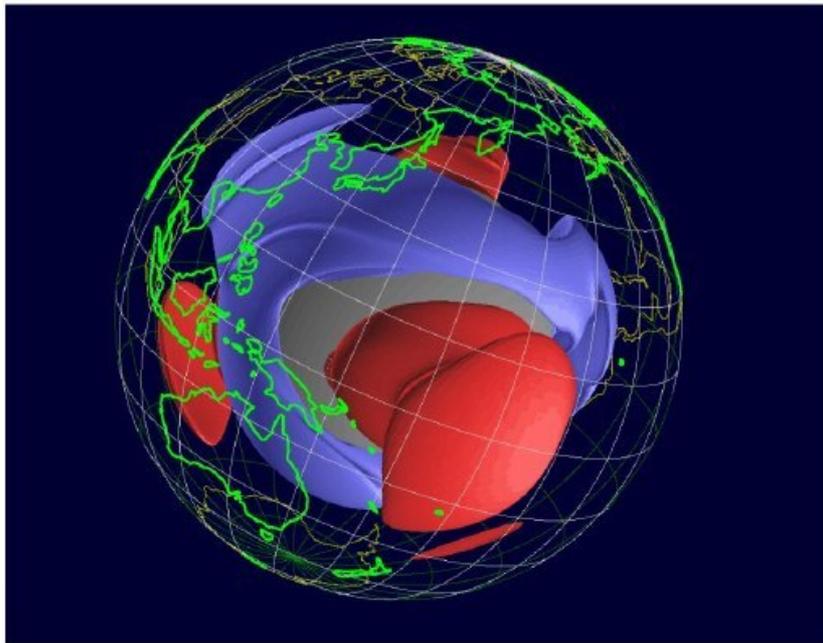


# Introduction : la tomographie

---



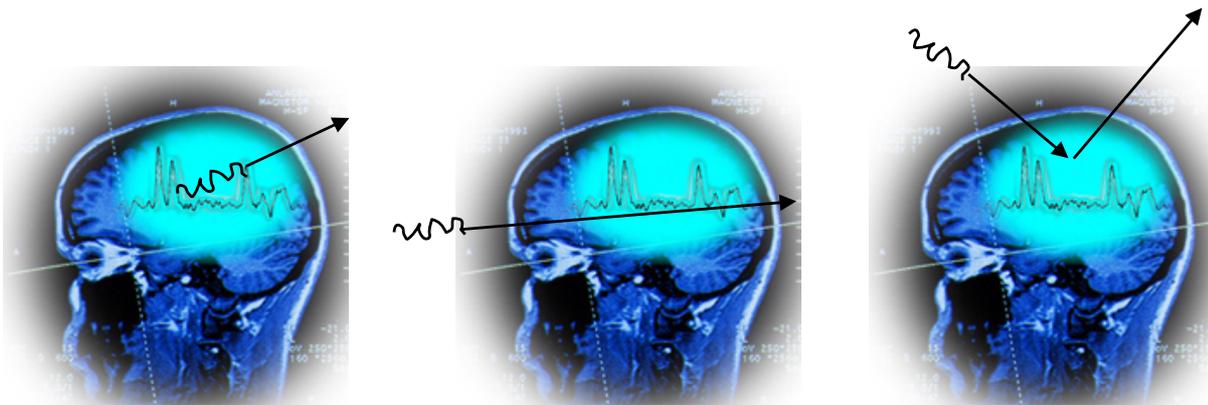
- Un moyen de sonder la matière, qui a de multiples domaines d'applications, e.g. :
  - contrôle non destructif
  - géophysique (sondage des océans, des couches géologiques)
  - astrophysique,
  - imagerie médicale



# La tomographie : principe

---

- Mesure de rayonnement émis, transmis ou réfléchi par la matière : **mesure indirecte** du paramètre relatif à l'objet d'intérêt



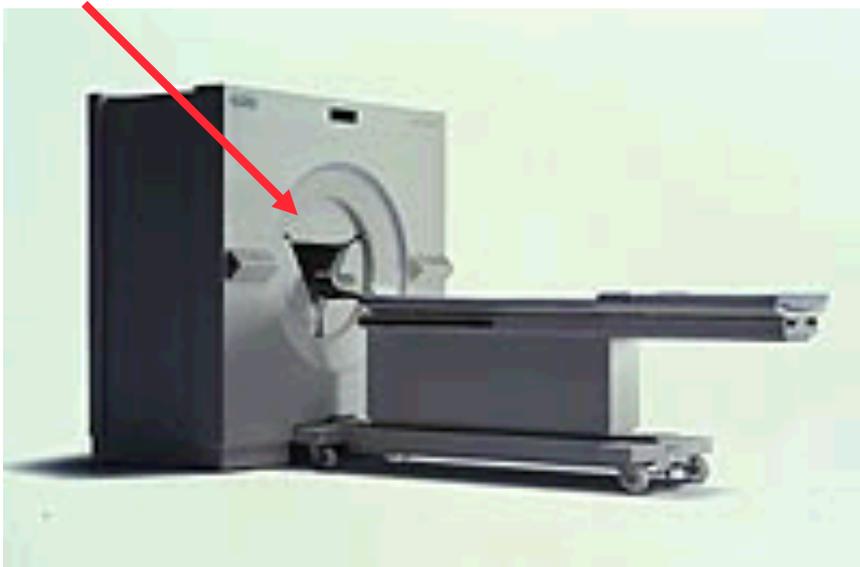
- **Traitement de l'information** détectée pour estimer le paramètre



# La tomographie médicale

---

- Mesure de rayonnement émis ou transmis par des tomodensitomètres (radiologie), gamma caméras ou tomographes à émission de positons (médecine nucléaire)



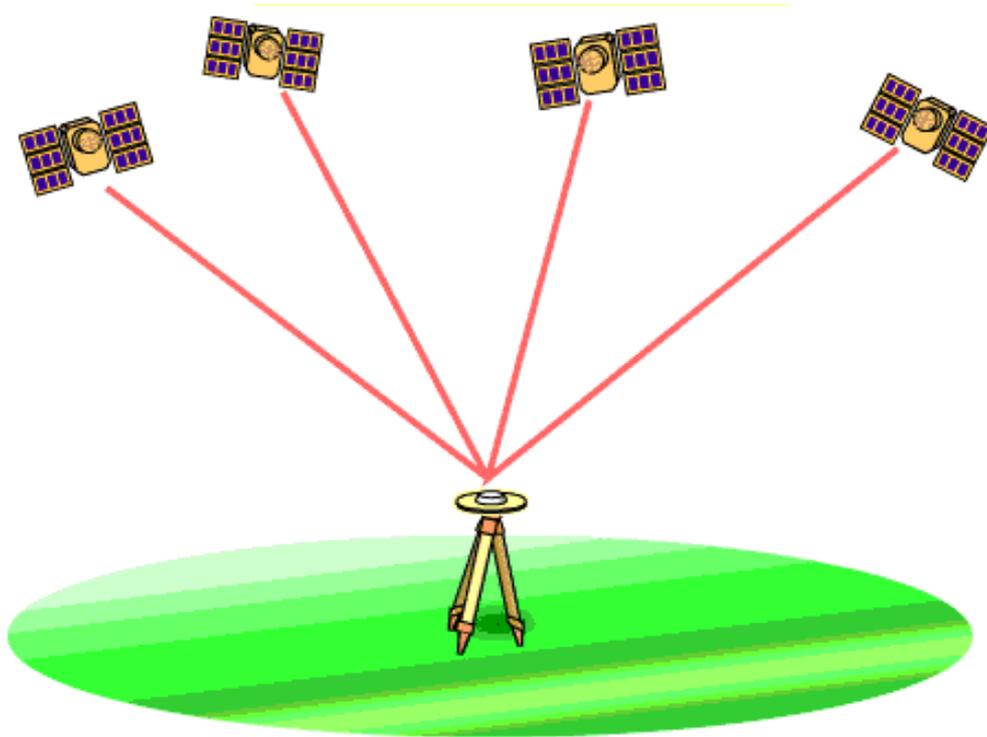
- Traitement de l'information détectée



# Le point clef

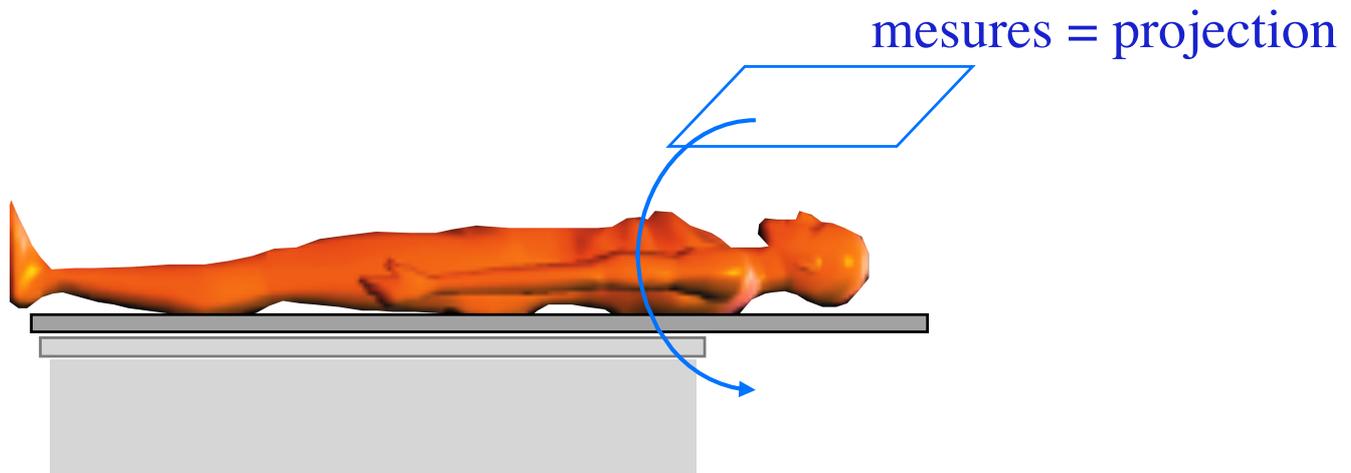
---

- Mesures sous différentes incidences angulaires



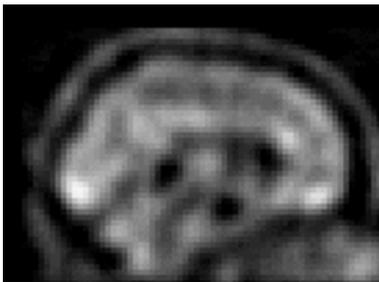
# En imagerie médicale

---

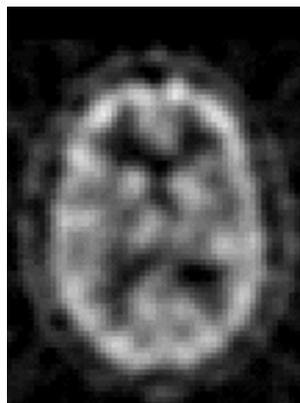


Mesures intégrales sous différentes incidences angulaires  
projections

Traitement de l'information détectée



sagittale



transverse

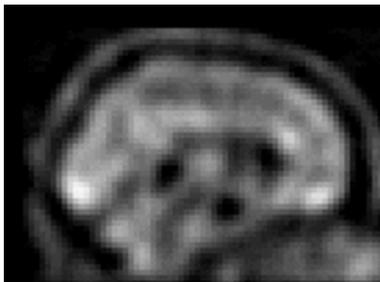
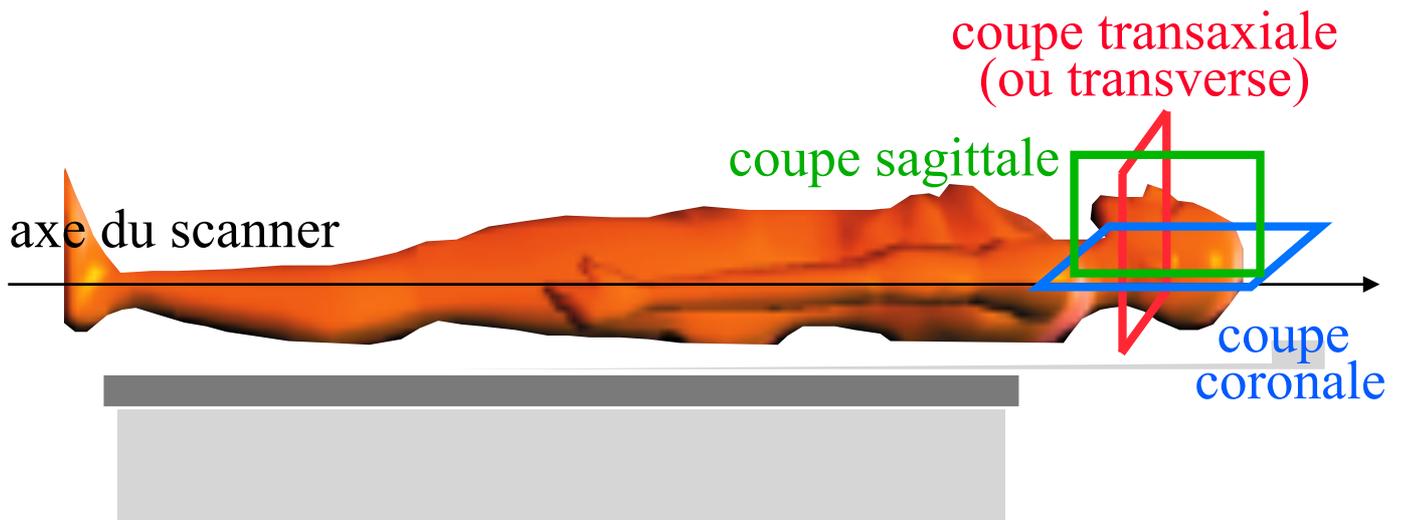


coronale

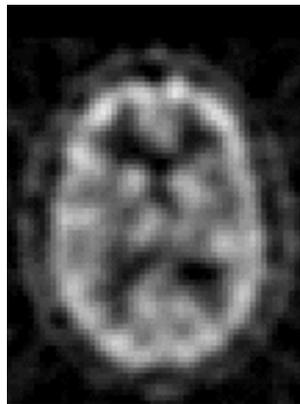
coupes d'orientation quelconque :  
imagerie 3D

# Coupes tomographiques

---



sagittale



transverse

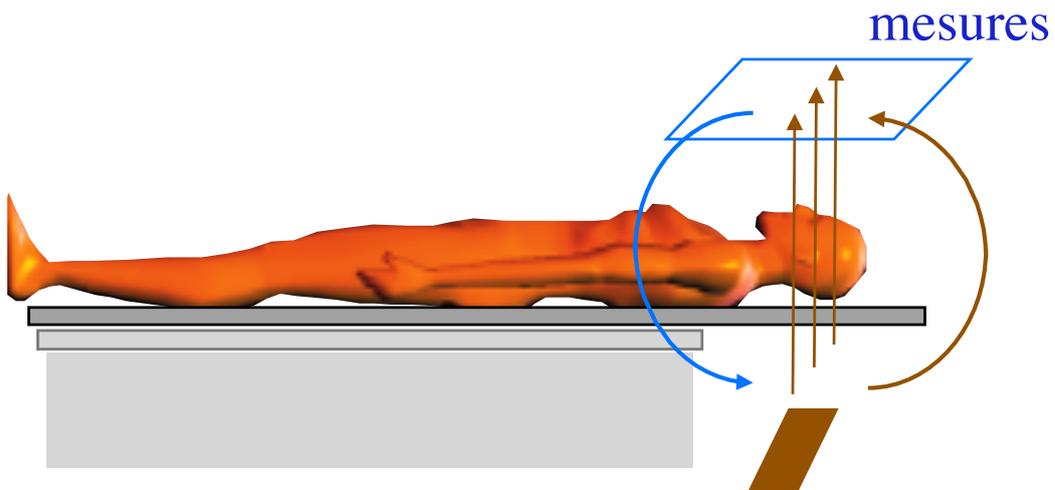


coronale

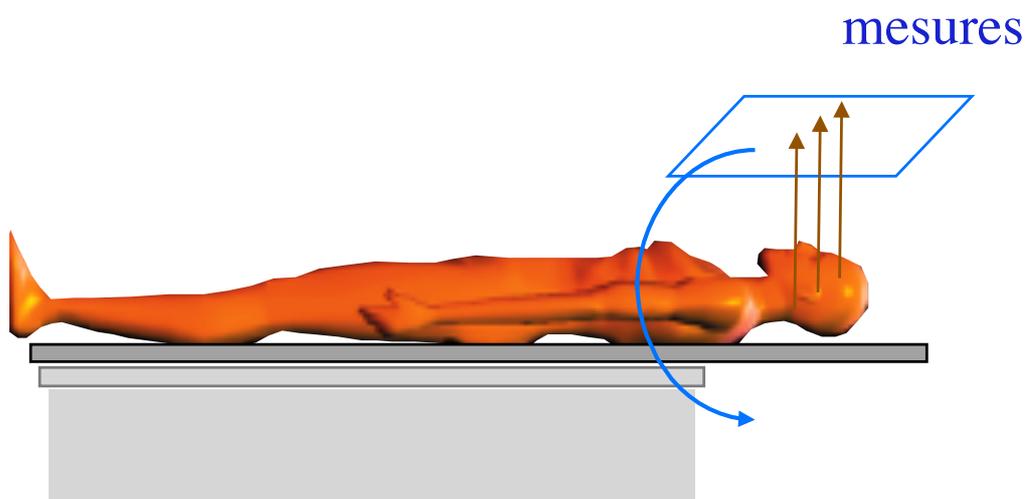
# Deux types de mesure en imagerie médicale

---

- Tomographie de transmission



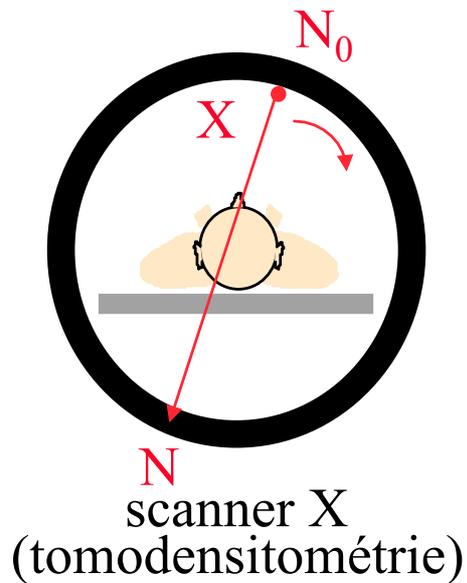
- Tomographie d'émission



# Tomographie de transmission : dispositifs

---

- Source X externe au patient

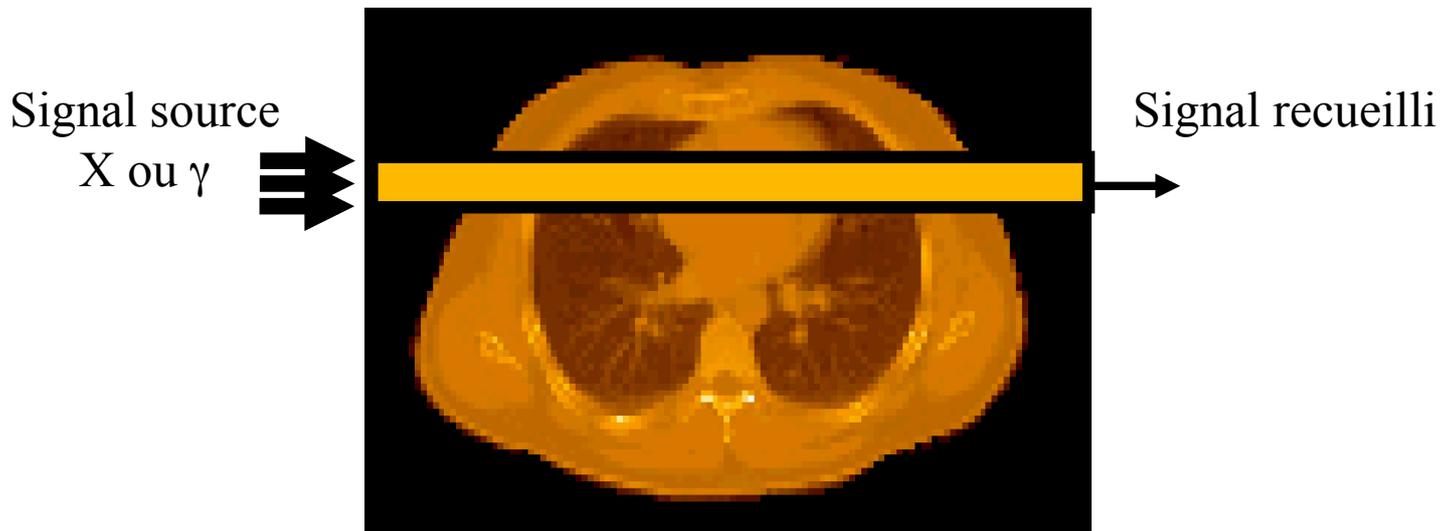


Donne des informations sur l'atténuation induite par les tissus, donc sur la densité des tissus

# Tomographie de transmission : mesures

---

- Projection du rayonnement ayant traversé le patient



Si signal recueilli  $\sim$  signal source :

$\Rightarrow$  quasiment pas d'atténuation : poumons ?

Si signal recueilli  $\lll$  signal source :

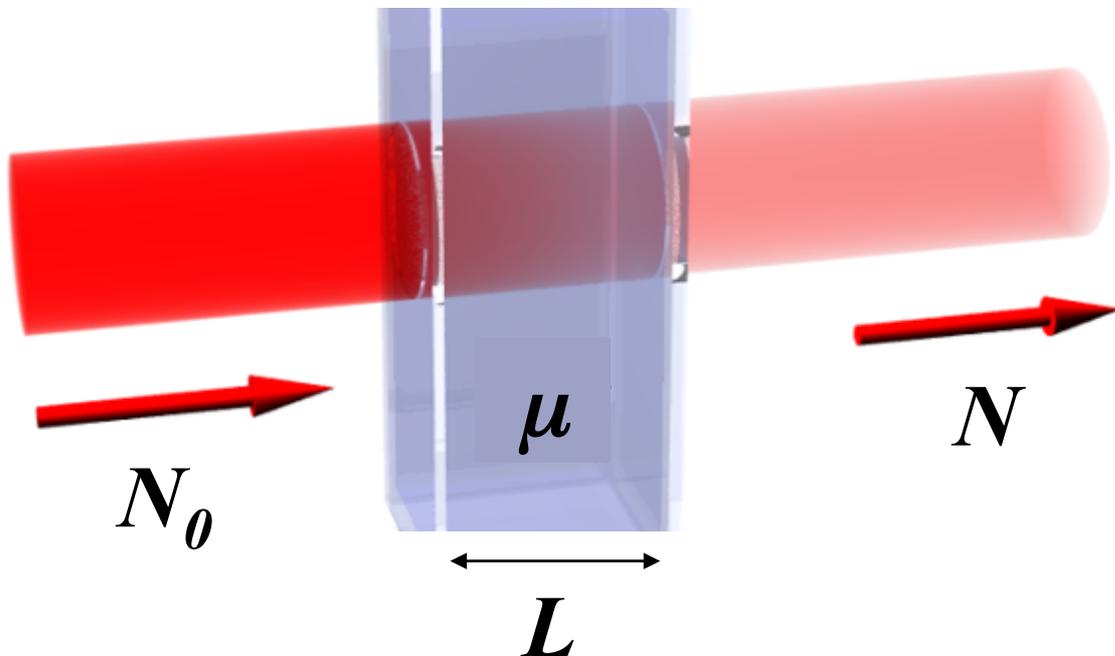
$\Rightarrow$  beaucoup d'atténuation : os ?

**Comment remonter à une information précise ?**

# Caractérisation de l'atténuation d'un milieu

---

- Le coefficient d'atténuation,  $\mu$ , exprimé en  $\text{cm}^{-1}$



$$N = N_0 \exp(-\mu L) \text{ (loi de Beer-Lambert)}$$

Dans l'eau, à 140 keV :  $\mu = 0,15 \text{ cm}^{-1}$

Quel pourcentage de photons de 140 keV après la traversée de 20 cm d'eau ?

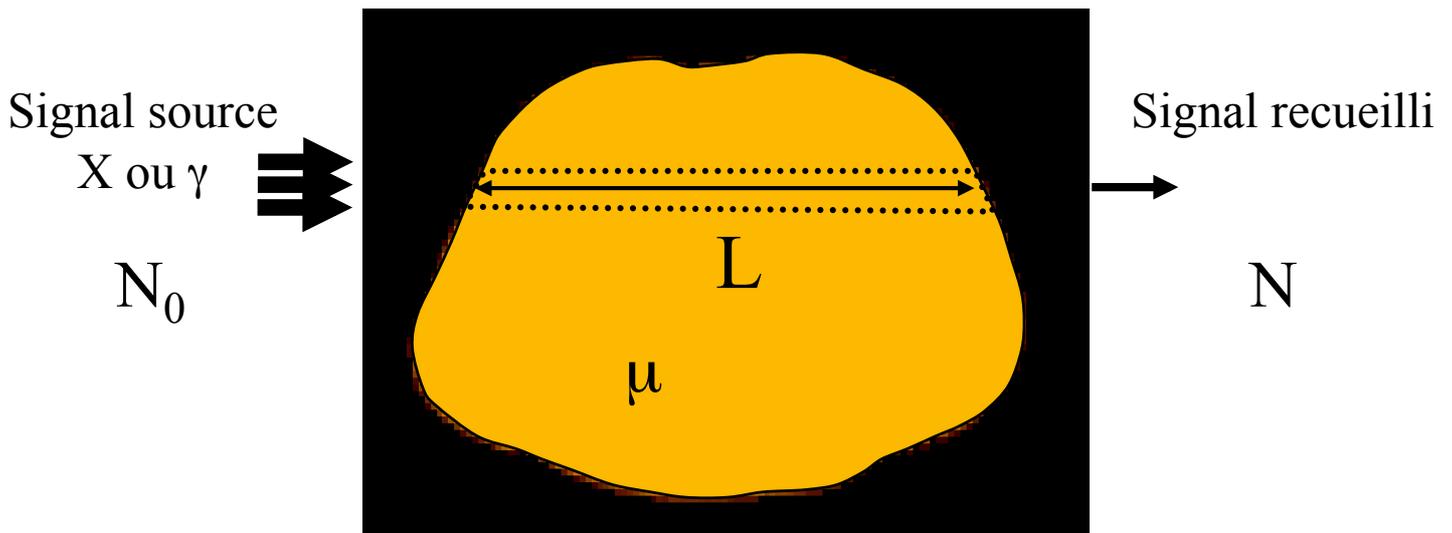
$$N = N_0 \exp(-0,15 \times 20) = 0,05 N_0, \text{ soit } 5\%$$

Quel milieu si on détecte 45% des photons de 140 keV après la traversée de 20 cm de ce milieu ?

$$\begin{aligned} N/N_0 &= 0,45 = \exp(-\mu \times 20) \\ 20 \mu &= -\ln 0,45 \Rightarrow \mu = 0,04 \text{ cm}^{-1} \text{ (poumons)} \end{aligned}$$

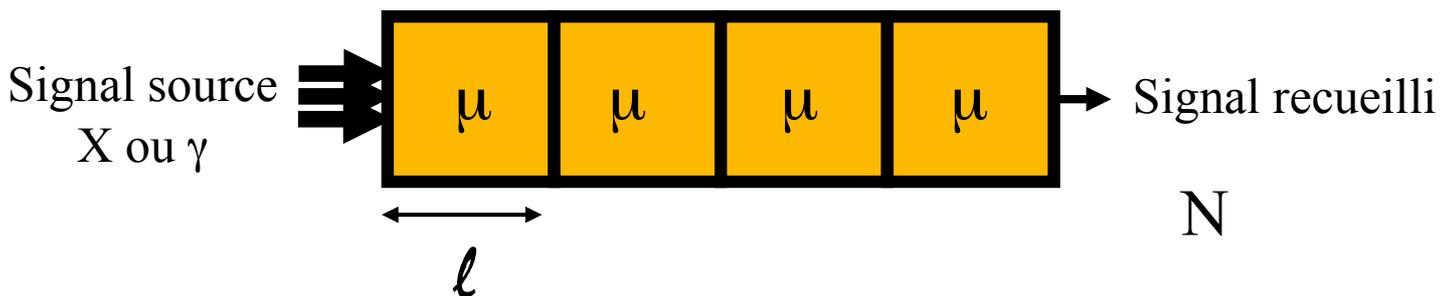
# Modélisation des mesures

- Atténuation d'une source  $\gamma$  ou  $X$  dans un milieu homogène de coefficient d'atténuation  $\mu$  (en  $\text{cm}^{-1}$ )



$$N = N_0 \exp(-\mu L)$$

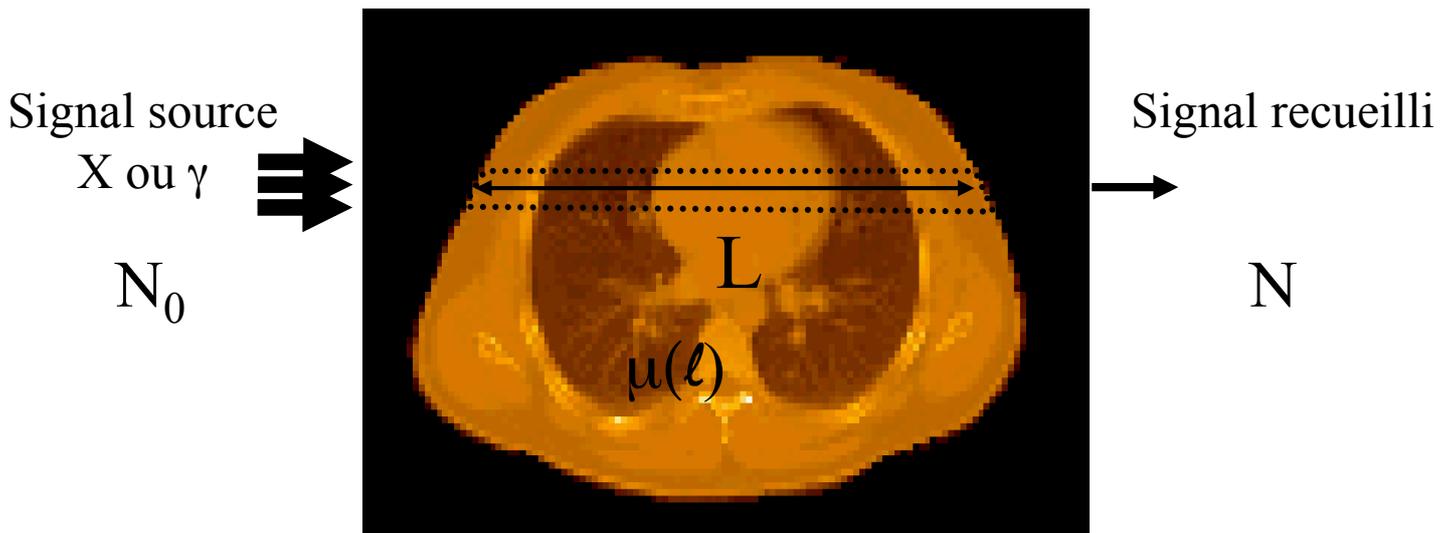
- Formulation discrète :



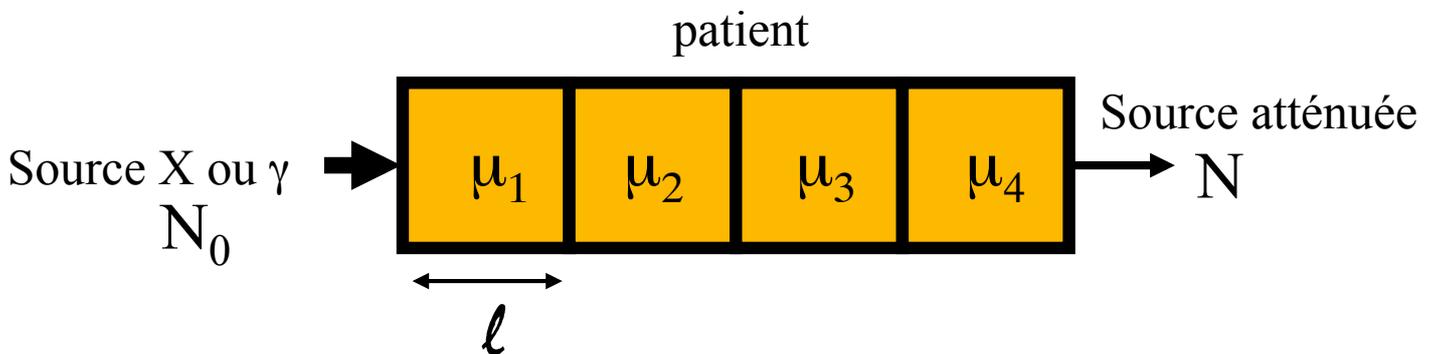
$$\begin{aligned} N &= N_0 \exp(-\mu l) \exp(-\mu l) \exp(-\mu l) \exp(-\mu l) \\ &= N_0 \exp(-\mu l - \mu l - \mu l - \mu l) = N_0 \exp(-4 \mu l) \end{aligned}$$

# Modélisation des mesures

- Atténuation d'une source  $\gamma$  ou X dans un milieu de densité inhomogène



- Formulation discrète



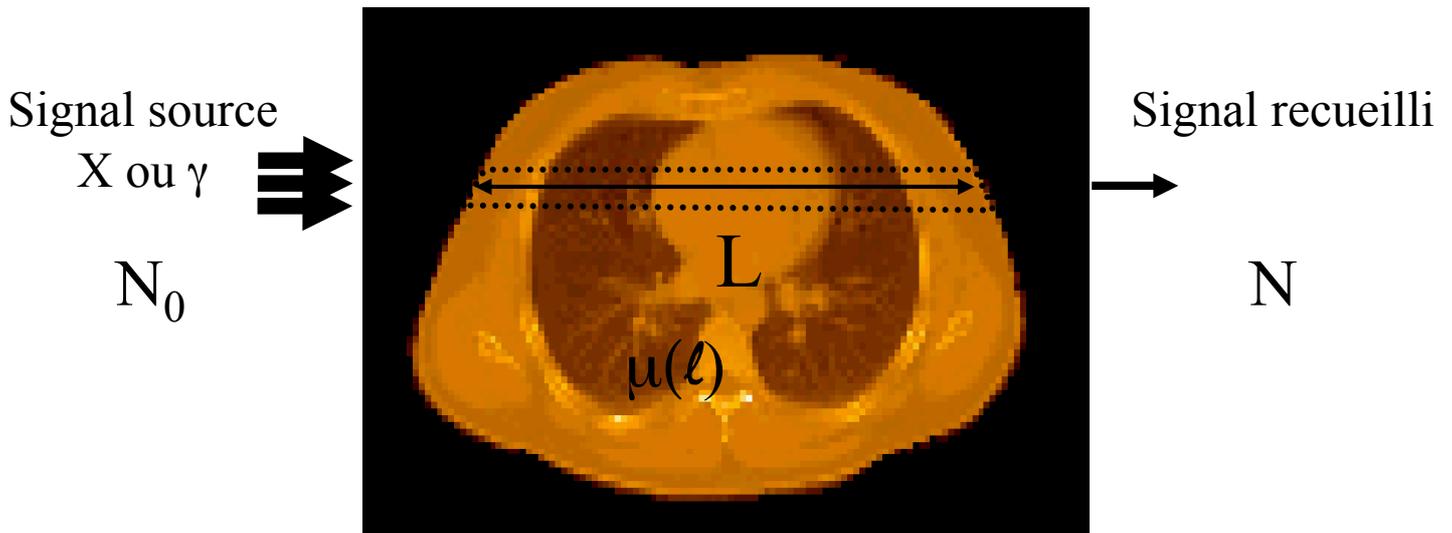
$$\begin{aligned} N &= N_0 \exp[-\mu_1 l - \mu_2 l - \mu_3 l - \mu_4 l] \\ &= N_0 \exp[-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) l] \end{aligned}$$

$$N = N_0 \exp\left(-\int_0^L \mu(l) dl\right)$$

## Problème à résoudre

---

- Trouver  $\mu(\ell)$ , qui représente la cartographie du coefficient d'atténuation dans le milieu



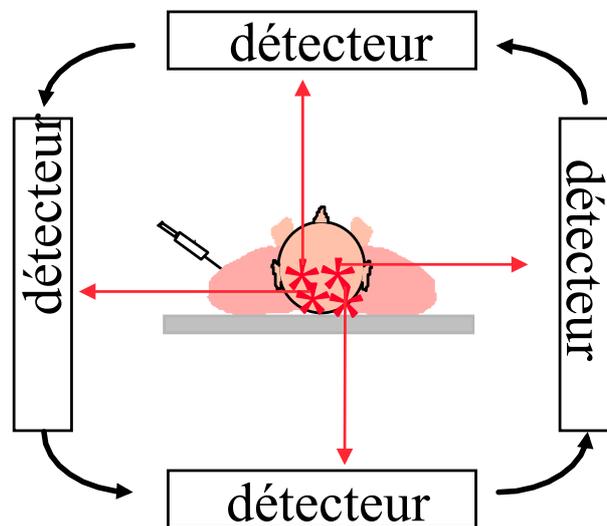
$$N = N_0 \exp\left(-\int_0^L \mu(\ell) d\ell\right)$$
$$\ln \frac{N_0}{N} = \int_0^L \mu(\ell) d\ell$$

... à partir des mesures intégrales  
(i.e. des sommes mesurées)

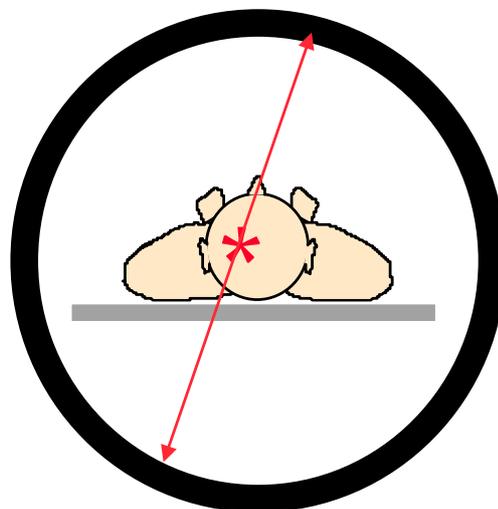
# Tomographie d'émission : dispositifs

---

- Source  $\gamma$  ou  $\beta^+$  interne au patient



SPECT



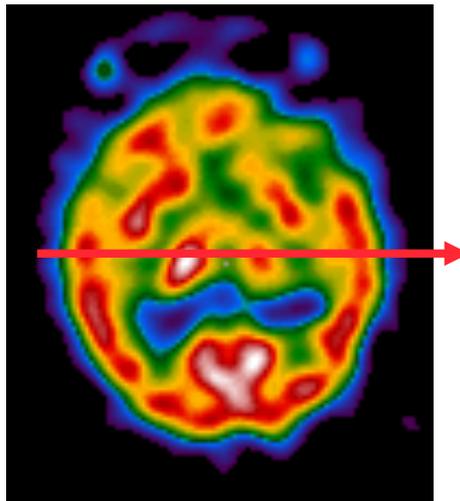
PET

Donne des informations sur la localisation de la source dans l'organisme

# Tomographie d'émission : mesures

---

- Idéalement (sans atténuation) : somme (intégrale) de l'activité le long des raies de projections



1	1	1	→ 3
1	3	1	→ 5
1	1	1	→ 3

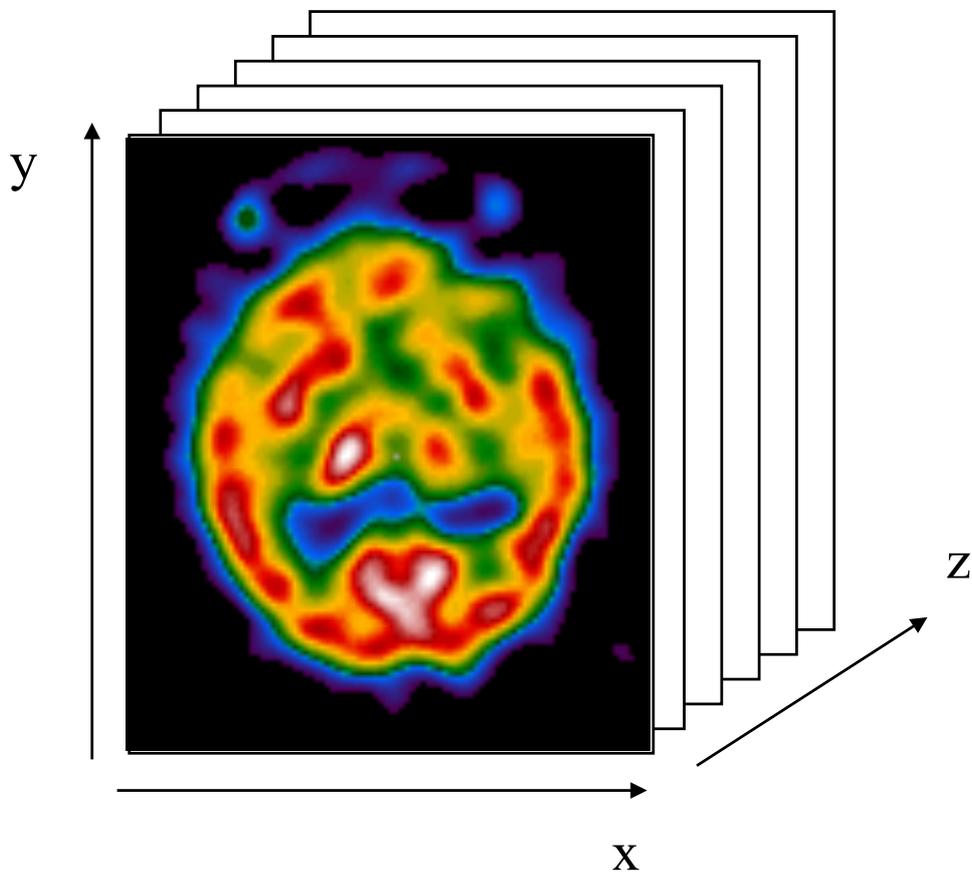
$$N = a_1 + a_2 + a_3$$

$$N = \int_0^D f(l) dl$$

# Problème à résoudre

---

- Objet à reconstruire : cartographie 3D de la concentration du radiotraceur dans l'organisme





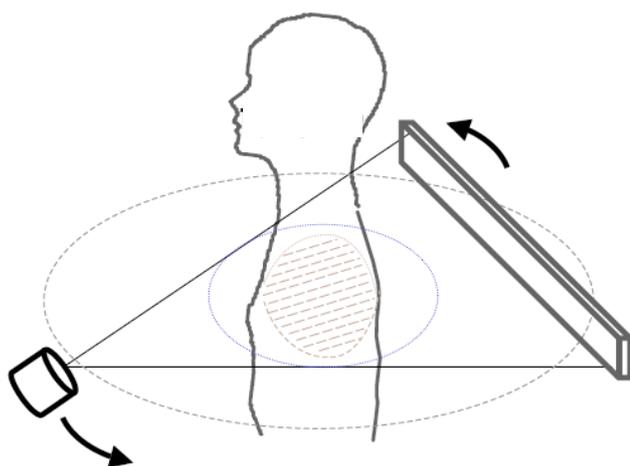
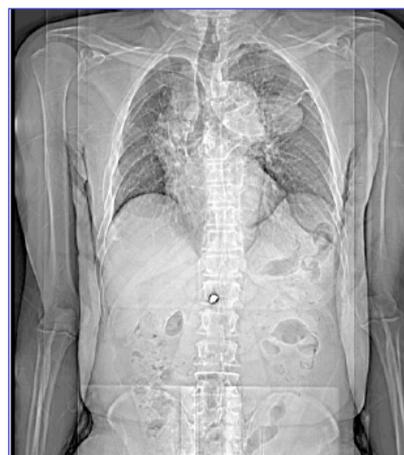
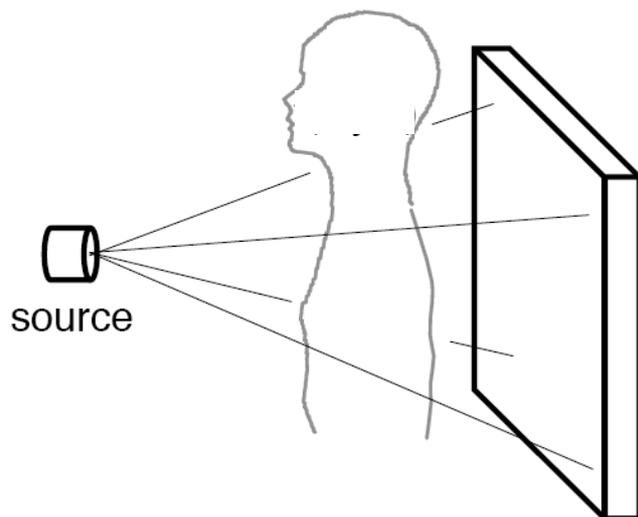
Estimer la distribution 3D du paramètre d'intérêt à partir des projections 2D mesurées

## Reconstruction tomographique

- Tomographie de transmission  
Paramètres d'intérêt = coefficient d'atténuation  $\mu$
- Tomographie d'émission  
Paramètres d'intérêt = carte d'activité

# Pourquoi faire de la tomographie ?

- Accès à une information volumique



# Pourquoi faire de la tomographie ?

---

- Rehaussement de contraste par rapport aux données projetées



Contraste = (signal d'intérêt - signal de fond)/signal de fond

Attention, il existe plusieurs définitions du contraste !

Exemple en tomographie d'émission :

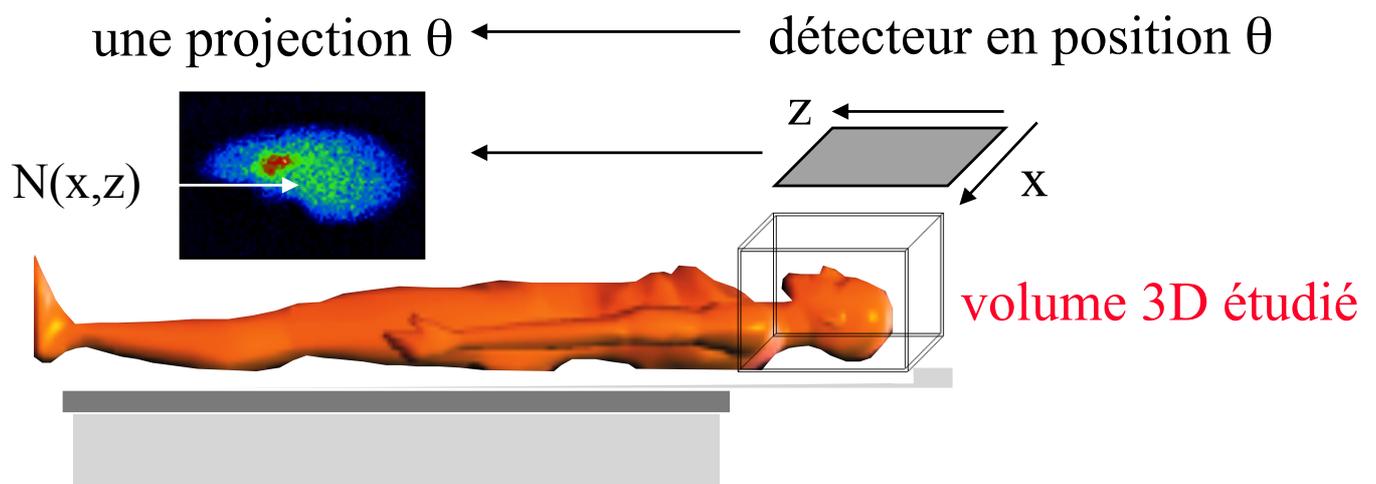
1	1	1	→ 3
1	3	1	→ 5
1	1	1	→ 3

Contraste sur les **projections** :  $(5-3)/3 = 0,66$

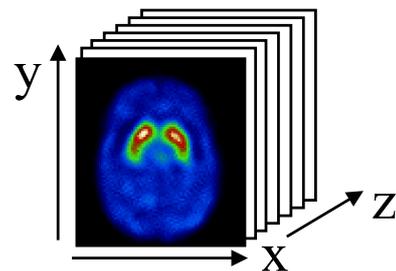
Contraste sur les coupes :  $(3-1)/1 = 2$

# Formulation du problème en 3D

- Un ensemble de projections 2D



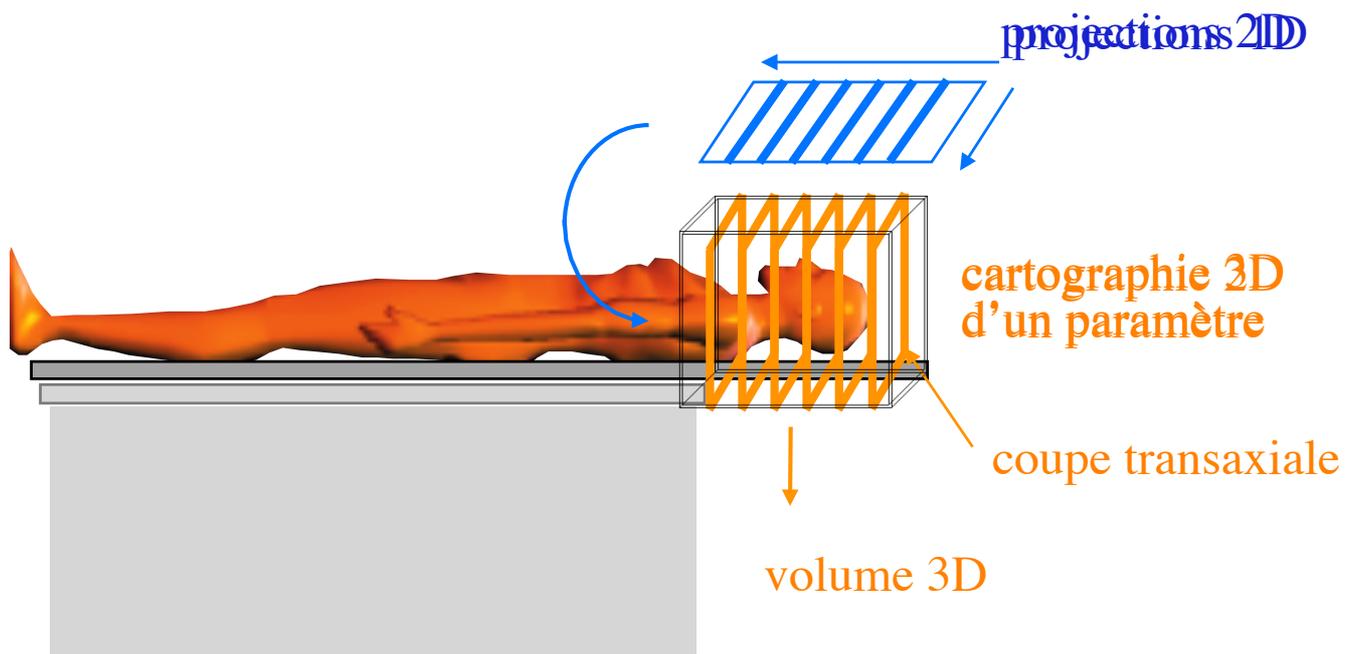
➔ reconstruction d'un objet 3D



# Factorisation du problème de reconstruction

---

volume 3D à partir d'images 2D

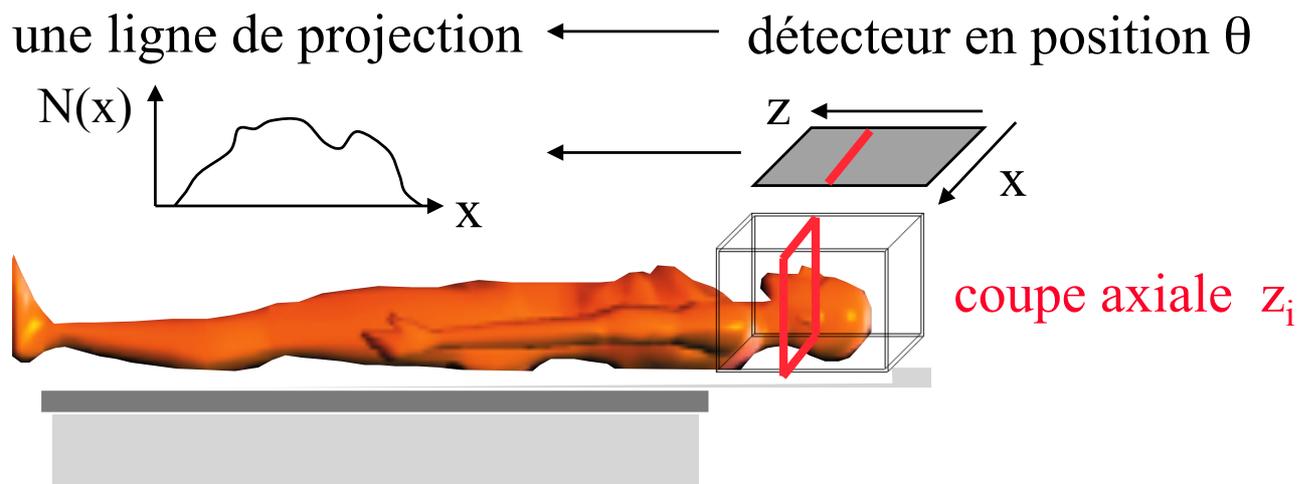


volume 3D reconstruit à partir de la reconstruction d'un ensemble d'images 2D

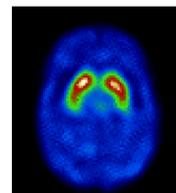
Dans un 1er temps, il suffit donc de comprendre comment on reconstruit l'image d'une coupe

# Formulation du problème en 2D

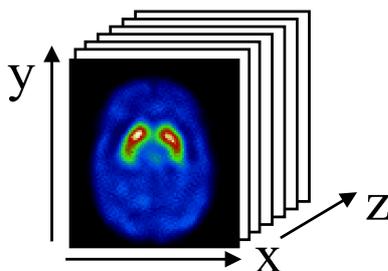
- Un ensemble de projections 1D



➔ reconstruction d'un objet 2D (coupe  $z_i$ )



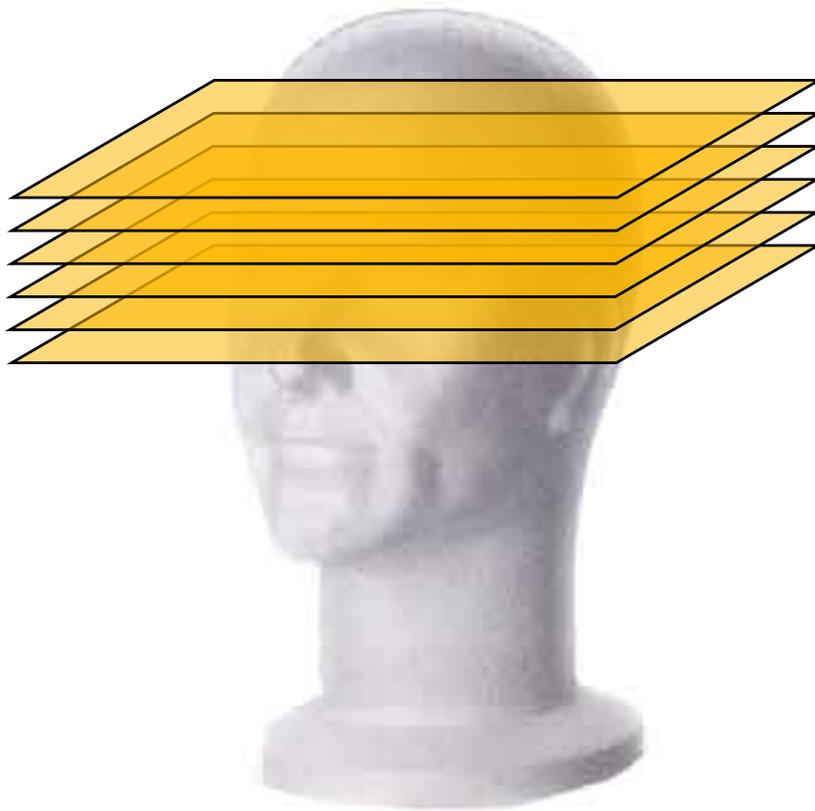
ensemble de coupes  $z_i$  = volume d'intérêt



# La reconstruction tomographique en général

---

- Estimation d'un volume 3D en reconstruisant indépendamment un ensemble de coupes 2D



# Pourquoi est-ce difficile ?

---



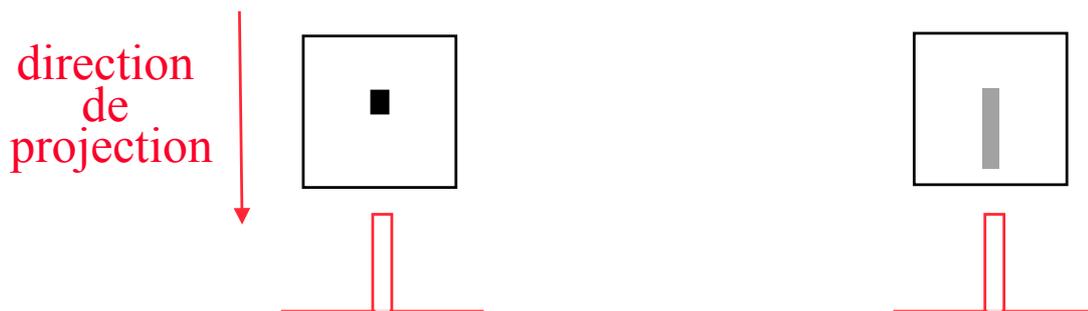
La leçon difficile, William Bouguereau (1825 - 1905)

# Non unicité de la solution

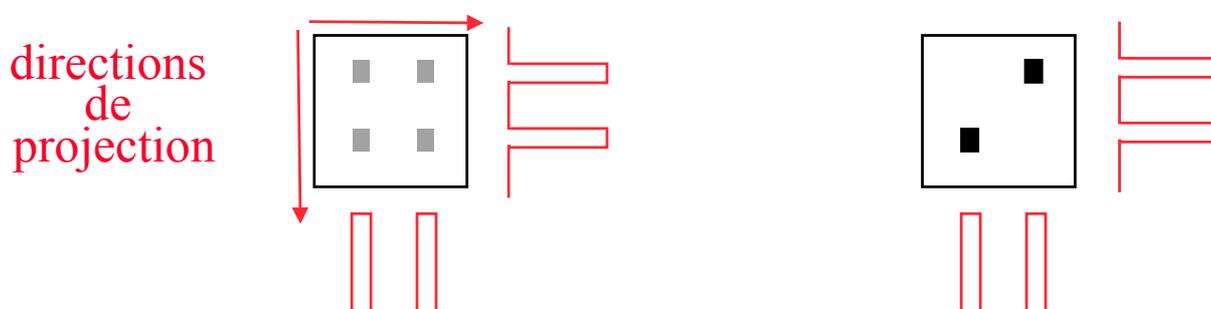
---

- Pas de solution unique : toujours plusieurs objets compatibles avec un ensemble fini de projections

1 projection : plusieurs solutions possibles



2 projections : plusieurs solutions possibles

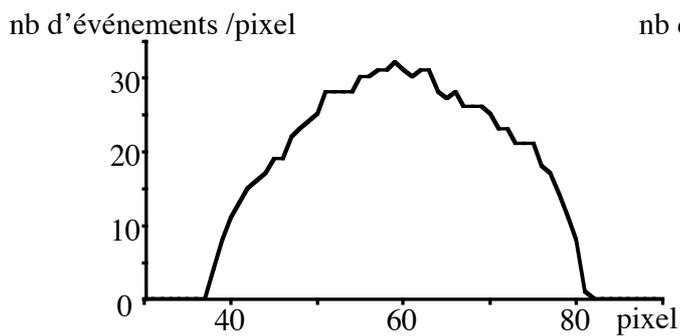
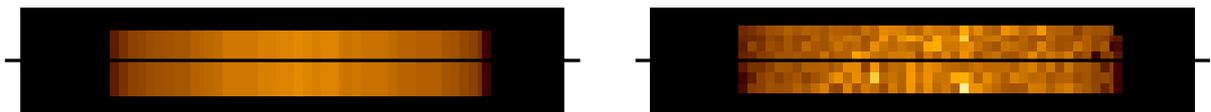


➔ Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

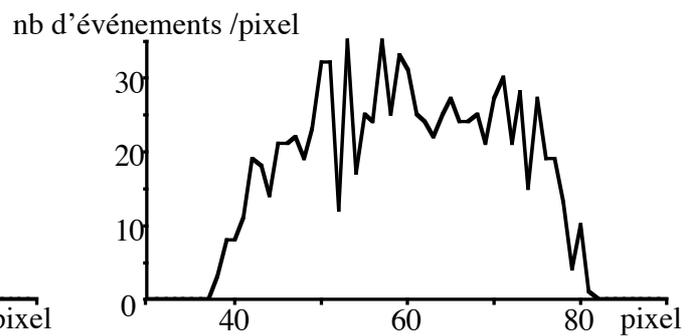
# Bruit

- Pas de solution du fait du bruit entachant les données

			mesures imparfaites	
10	11	9	→ 30	32
10	32	10	→ 52	50
11	8	10	→ 29	27



projection idéale



projection bruitée

# Problème inverse mal posé

---



- Problème inverse :  
On dispose de mesures et il faut trouver ce qui a produit ces mesures
- Problème mal posé :  
La solution est instable : une petite différence sur les projections peut conduire à des coupes reconstruites très différentes

# Notions de base

---



# Travaux princeps

---

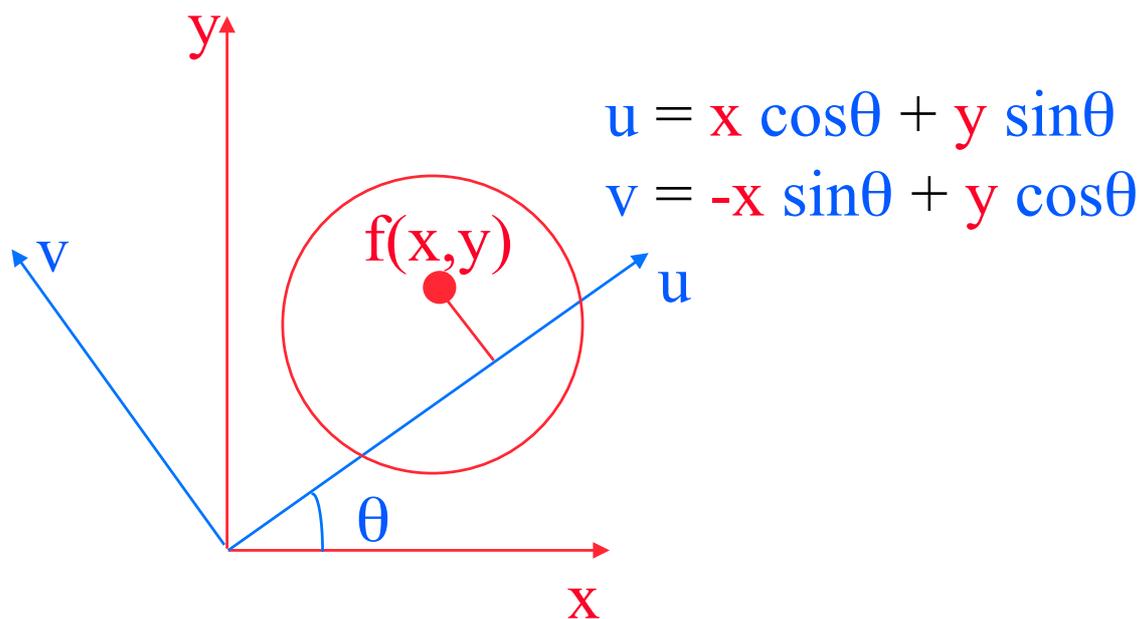
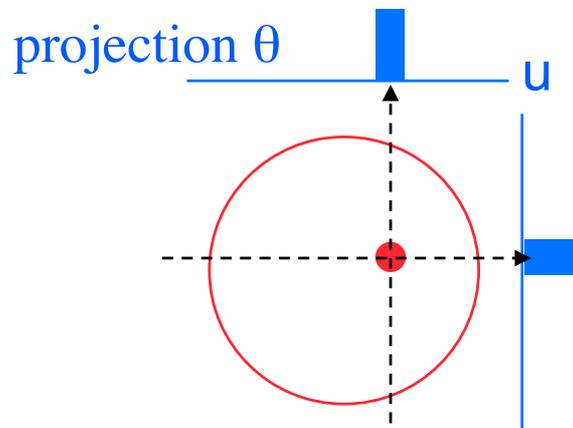


1887-1956

*1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”, Math. Phys. Klass*

# Formulation continue de l'opération de projection

---

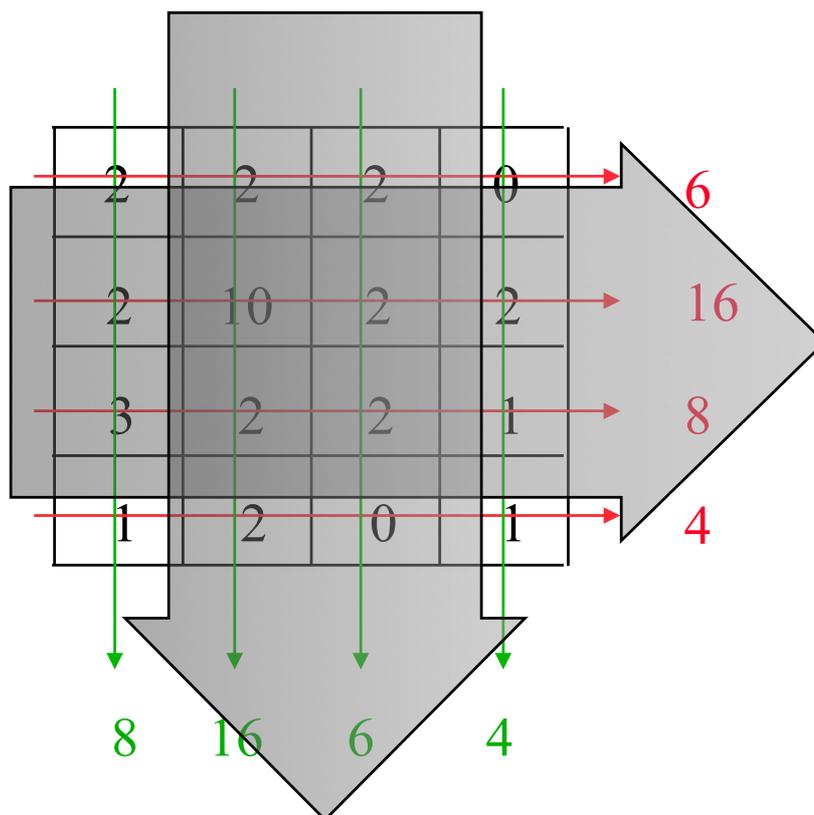


$$p(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dv$$

# Formulation discrète de l'opération de projection

---

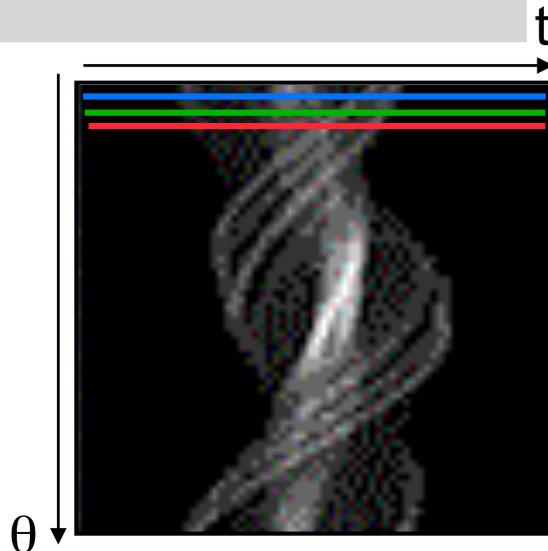
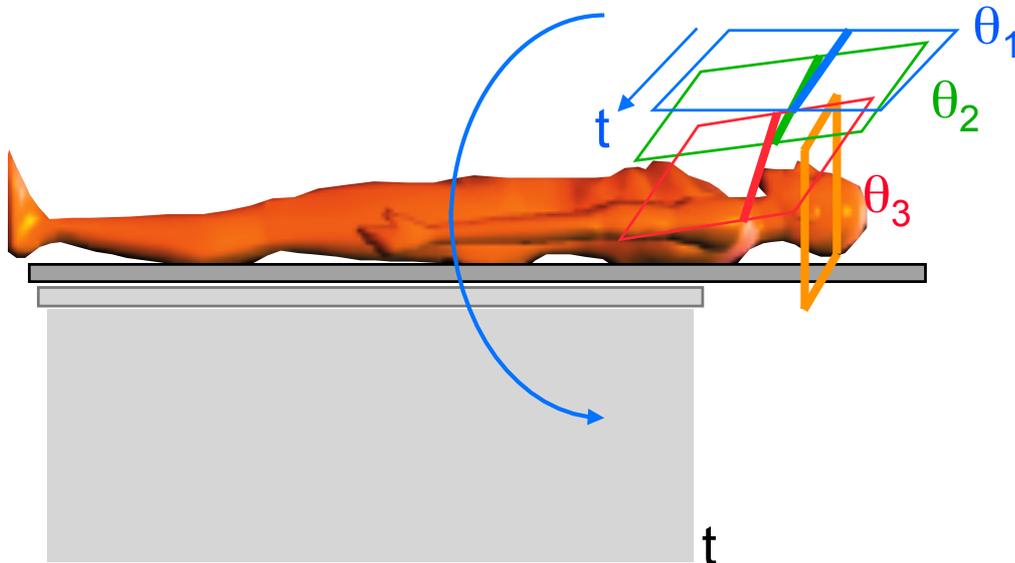
- Calculer les 2 projections de la distribution d'activité représentée





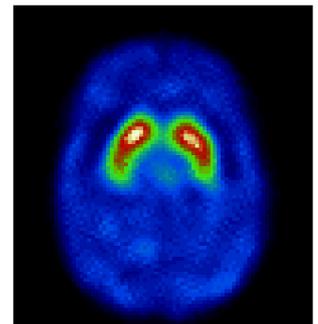
# Sinogramme

Sinogramme = signal issu d'une coupe  $z_i$  vue sous différentes incidences  $\theta$



sinogramme correspondant à la coupe  $z_i$

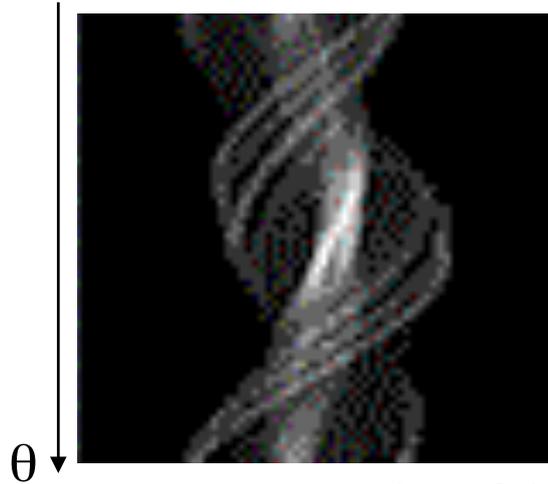
reconstruction tomographique → coupe  $z_i$



# Sinogrammes et projections

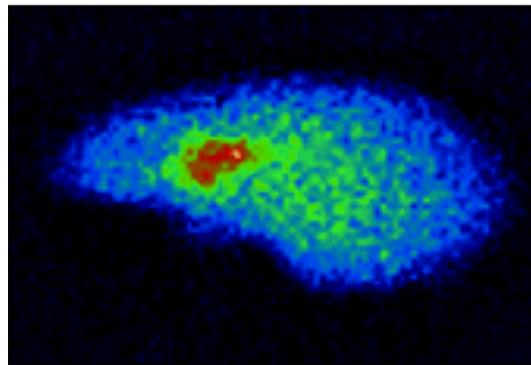
---

Les sinogrammes et les projections contiennent les mêmes informations : ils ne diffèrent que par l'organisation avec laquelle les informations sont représentés.



sinogramme correspondant à la coupe  $z_i$

Un sinogramme : toute l'information relative à une coupe, obtenue pour tous les angles de projection.



projection correspondant à l'angle  $\theta$

Une projection : l'information relative à toutes les coupes, mais pour une incidence angulaire unique.

# Compris ?

---

On dispose de 64 projections de dimension 128 pixels (dans la direction axiale ) x 256 pixels

- Combien de coupes transaxiales peut-on reconstruire sans interpolation ?

128

- Combien de sinogrammes peut-on former à partir de ces projections ?

128

- Quelles sont les dimensions d'un sinogramme ?

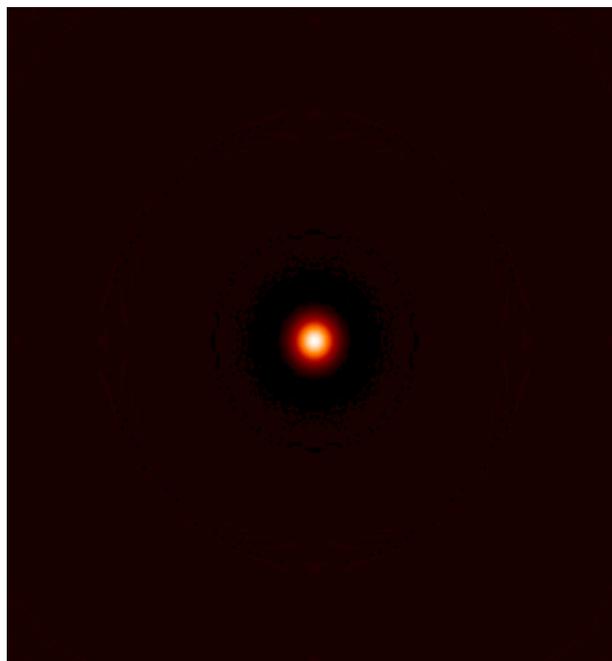
64 lignes et 256 colonnes



# Compris ?

---

Tomographie d'émission :  
Est-ce une projection ou un sinogramme ?

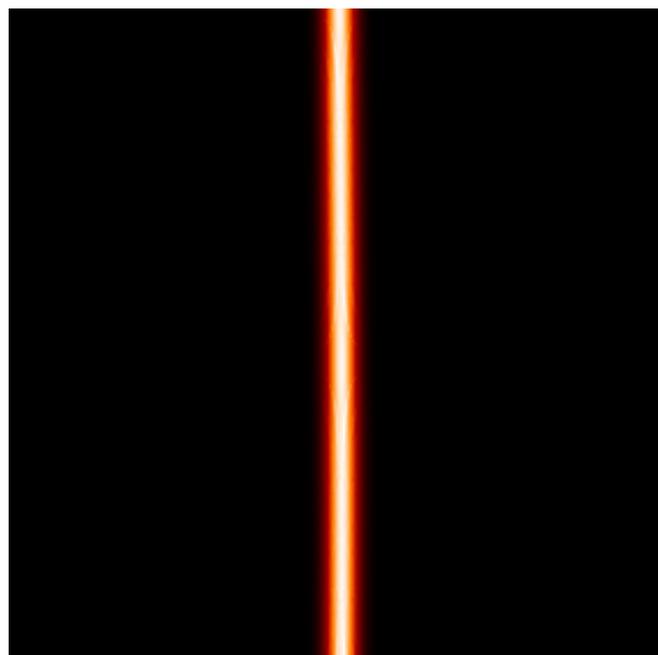
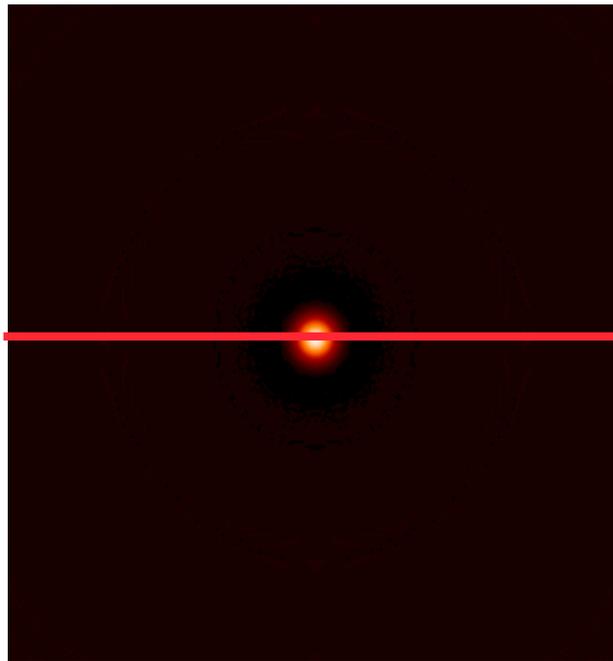


# Compris ?

---

Tomographie d'émission :

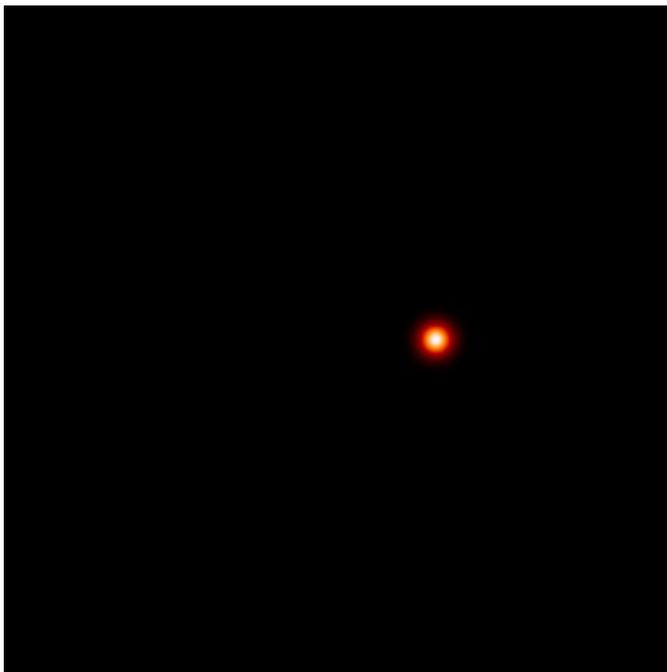
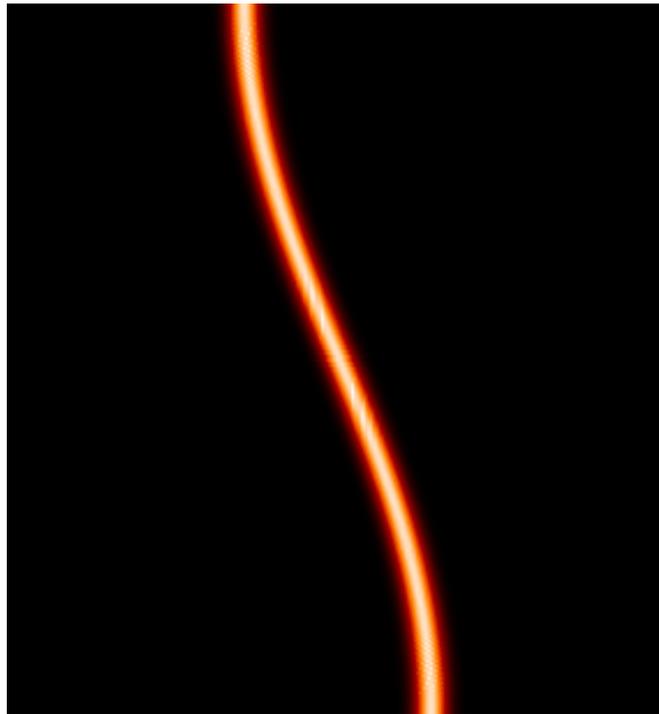
Si toutes les projections sont identiques à celles-ci, quel est le sinogramme correspondant à la coupe indiquée ?



# Compris ?

---

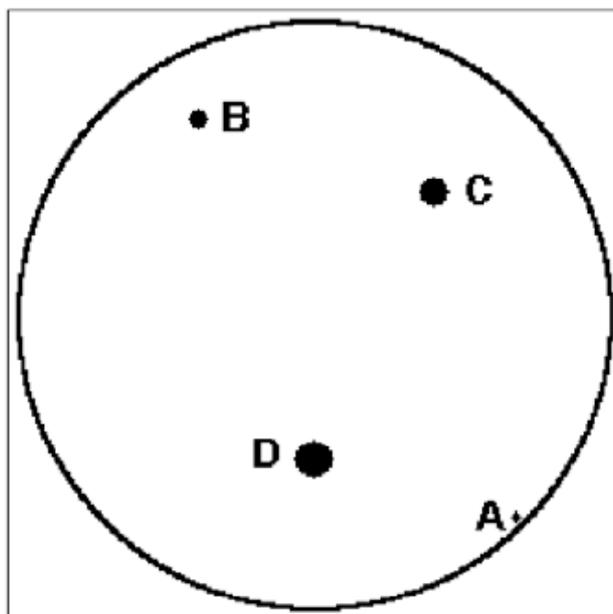
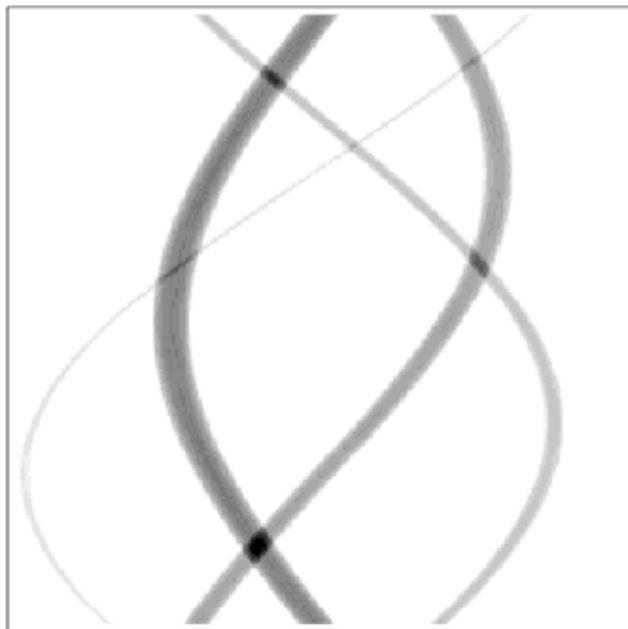
Tomographie d'émission :  
A quoi correspond ce sinogramme ?



# Compris ?

---

Tomographie d'émission :  
A quoi correspond ce sinogramme ?



# Deux approches à la reconstruction tomographique

---

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R f$$

# Les méthodes analytiques : introduction

---

- Inversion analytique de la transformée de Radon = résolution d'équations intégrales
- Expression continue du problème de reconstruction tomographique
- Méthode la plus courante : rétroprojection filtrée

## FBP : Filtered BackProjection

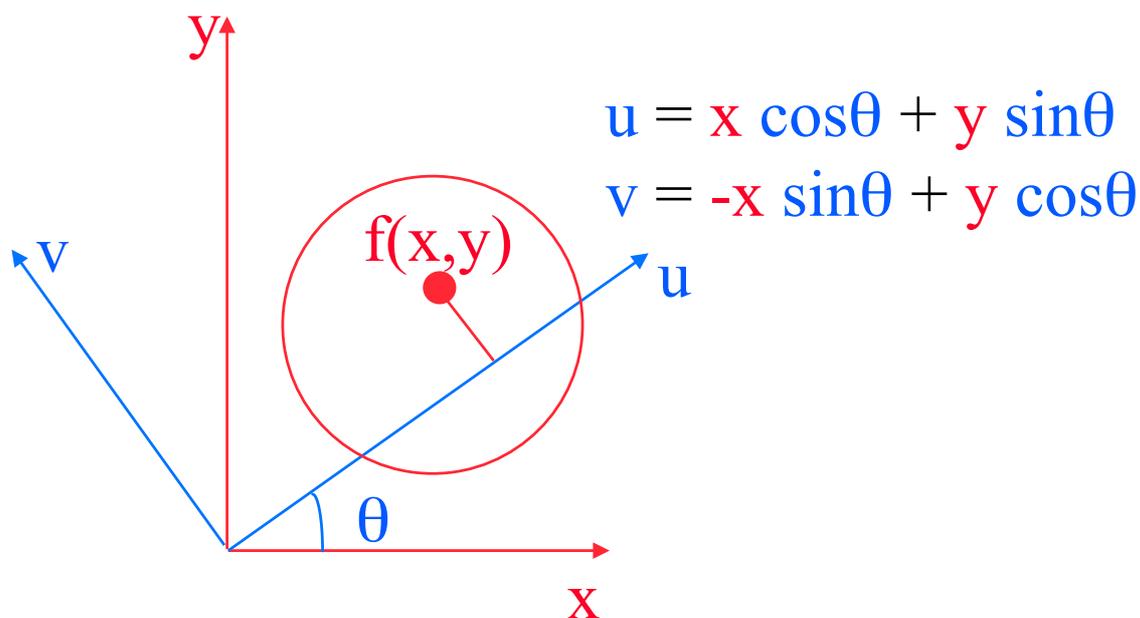
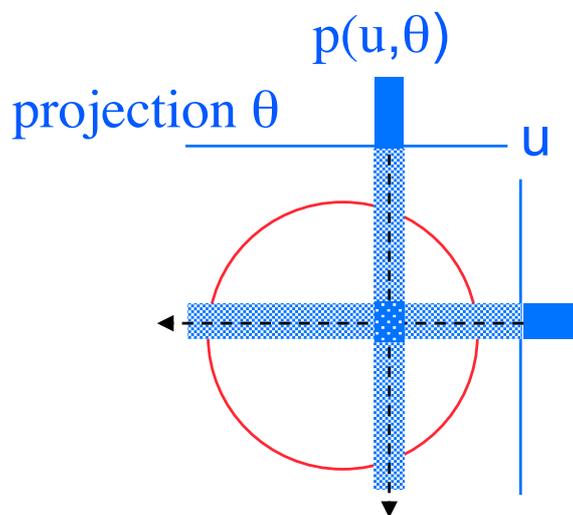
- Méthodes rapides



- Méthodes disponibles sur tous les dispositifs d'acquisition commercialisés (scanner X, SPECT, PET)

# Opération de rétroprojection : expression continue

---



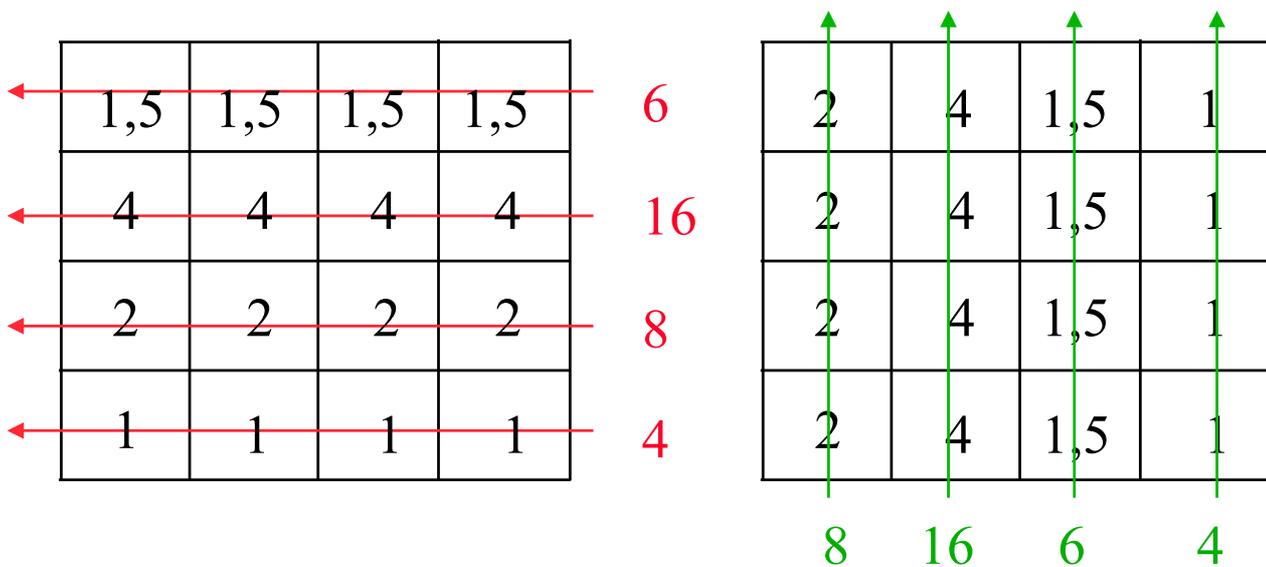
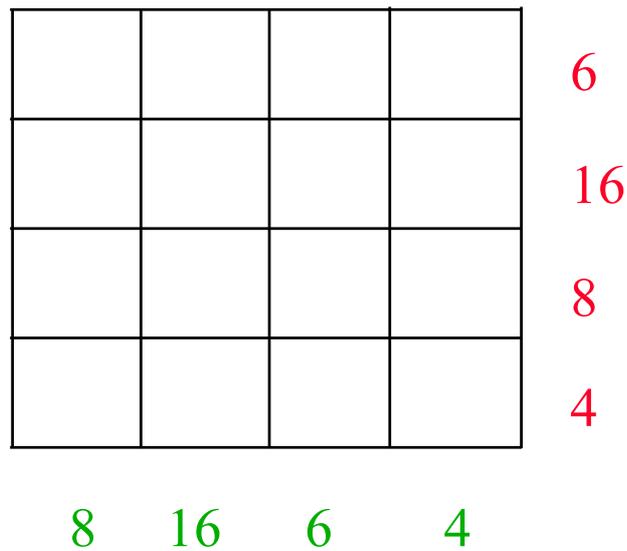
$$f^*(x, y) = \int_0^{\pi} p(u, \theta) d\theta$$

Attention : la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon

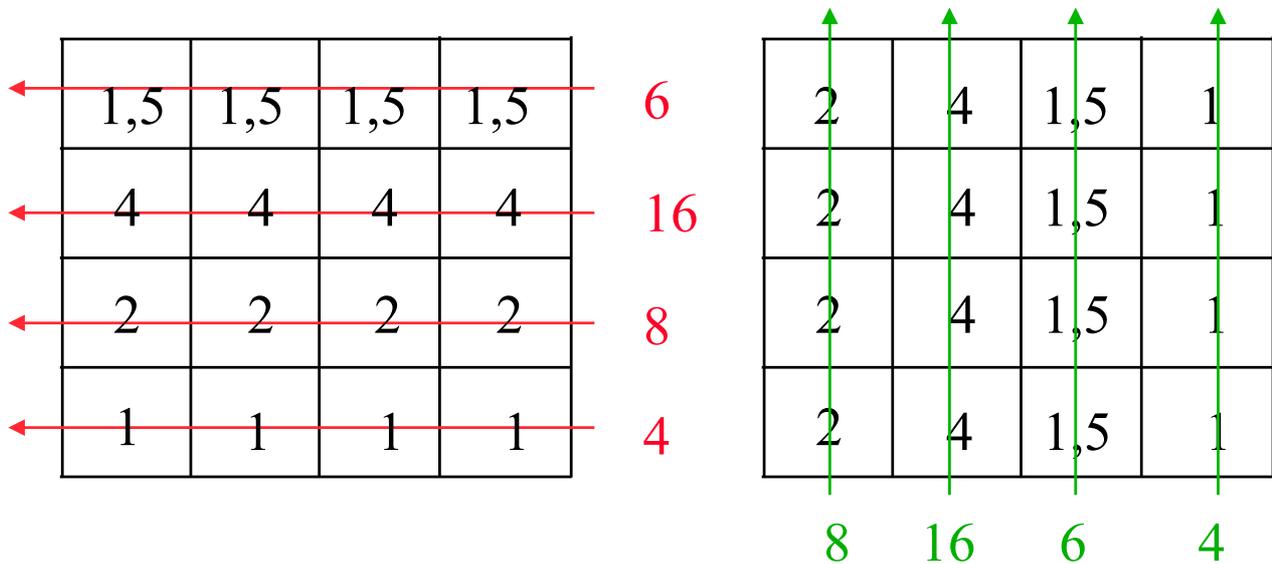
# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection

---

- Calculer la rétroprojection des projections mesurées



# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection



Moyenne :  
 Rapport **tumeur** / **fond**  
 $= 4 / 1,5 = 2,6$

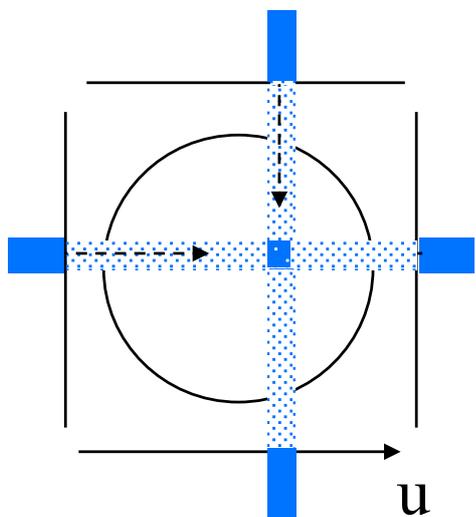
1,75	2,75	1,5	1,25
3	4	2,75	2,5
2	3	1,75	1,5
1,5	2,5	1,25	1

Image originale :  
 Rapport **tumeur** / **fond**  
 $= 10 / 1 = 10$

2	2	2	0
2	10	2	2
3	2	2	1
1	2	0	1

La rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon !

# Limites de la rétroprojection simple



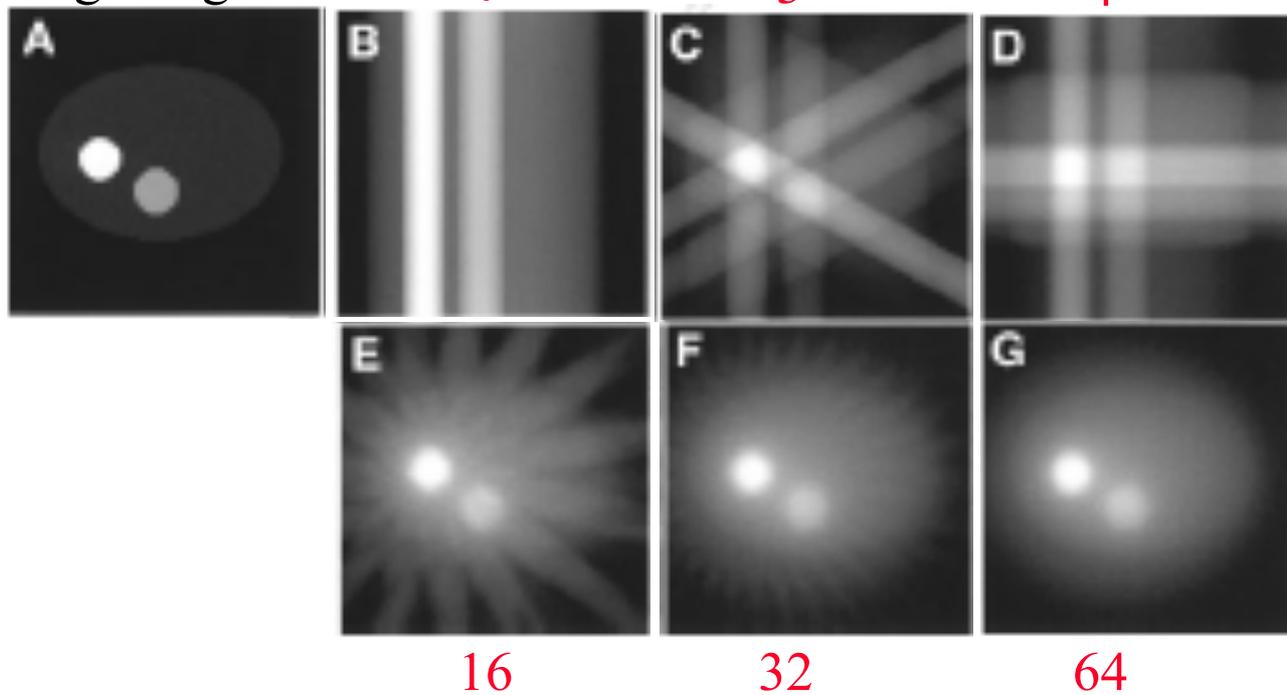
$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

rétroprojection simple

➔ artefacts d'épandage en étoile dû au nombre limité de projections

nombre de projections

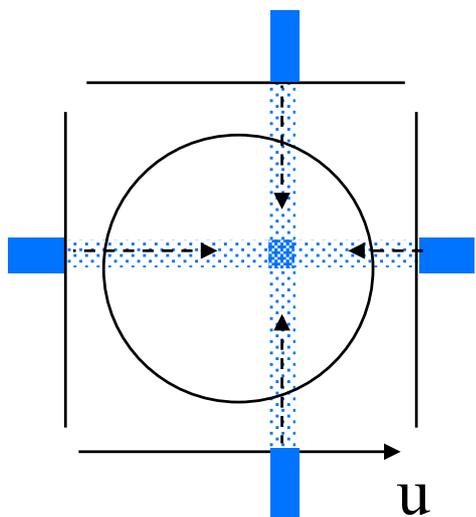
image originale



La rétroprojection n'inverse pas la transformée de Radon

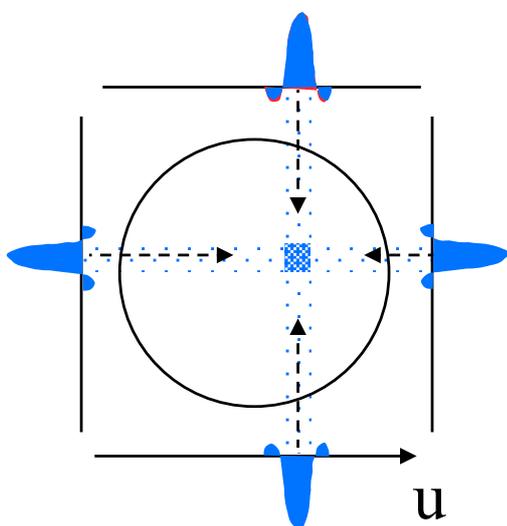
# Rétroprojection filtrée : principe

---



$$f^*(x,y) = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

↑  
projection filtrée

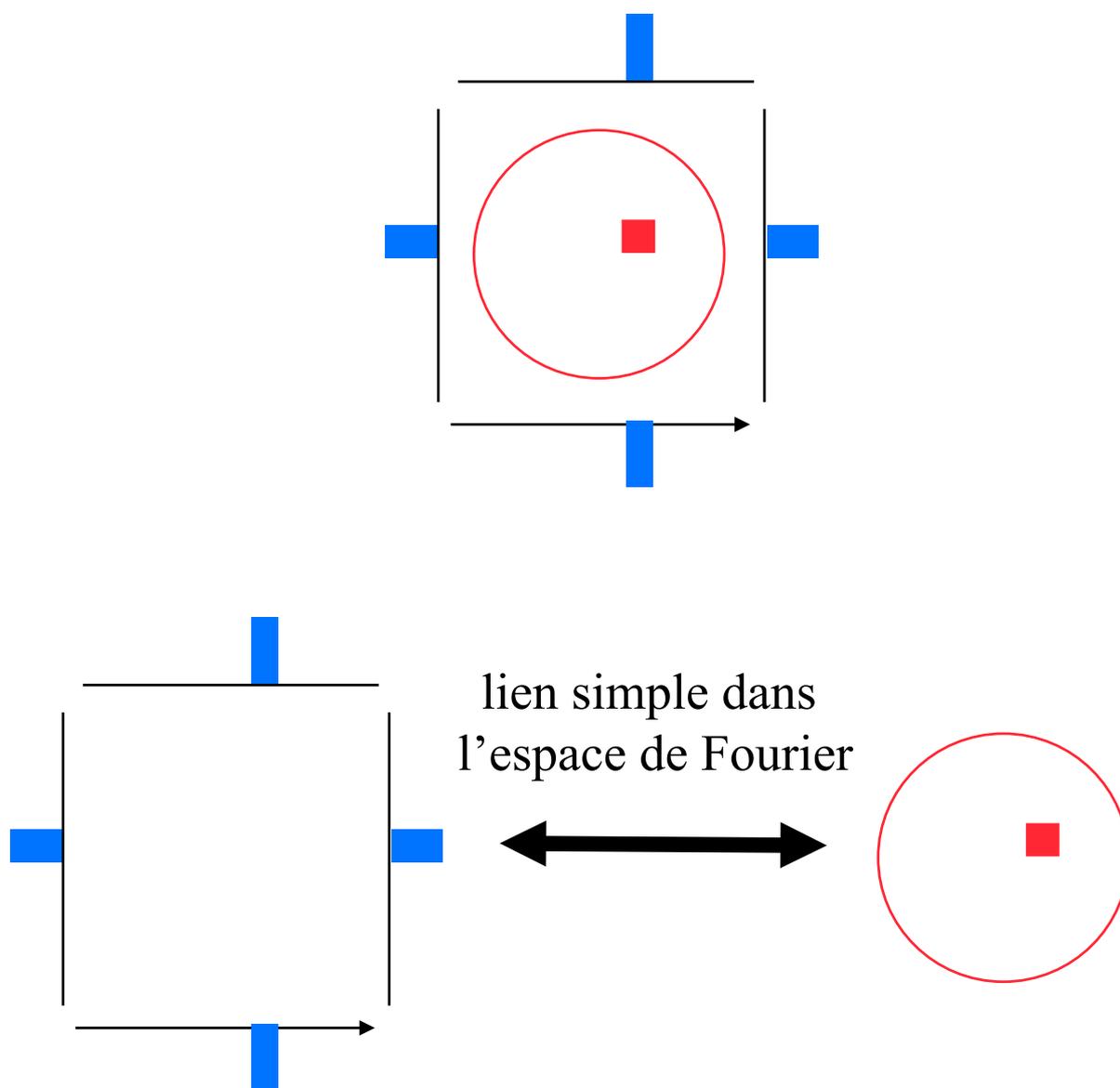
rétroprojection filtrée :  
réduction des artefacts  
inversion exacte de la transformée de Radon

# Quel filtrage ?

---

Le filtre qui permet d'inverser exactement la transformée de Radon peut être dérivé théoriquement, en vertu du théorème de la coupe centrale

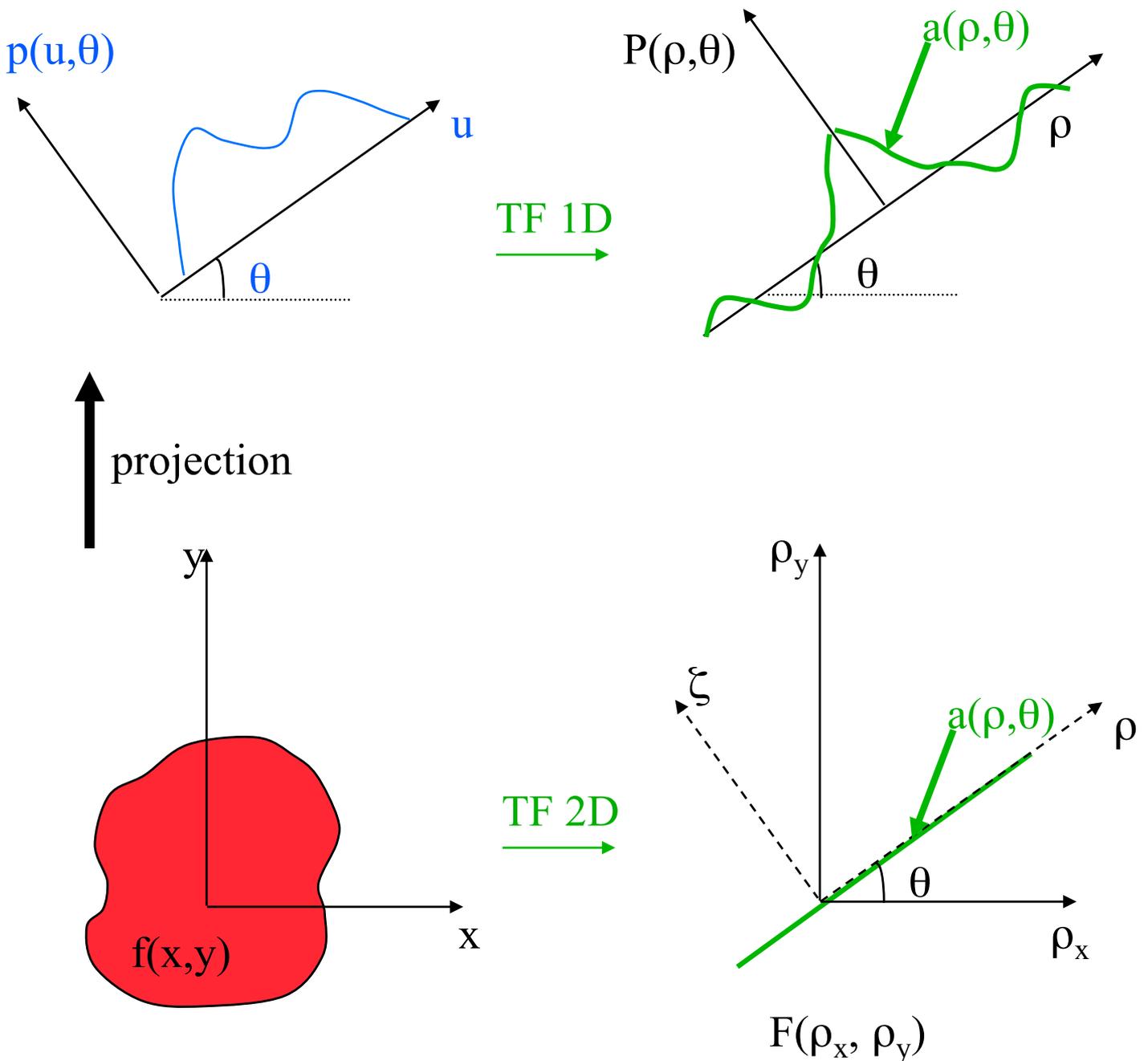
Ce théorème donne le lien entre les projections et l'objet dans l'espace de Fourier



# Théorème de la coupe centrale (TCC)

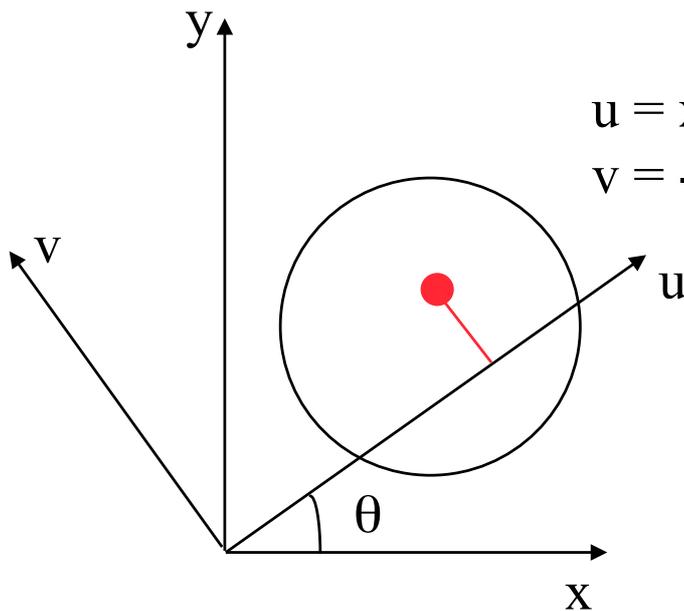
TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à  $u$   
 =  
 TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y) \Big|_{\zeta=0}$$



# Théorème de la coupe centrale : démonstration

$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv \xrightarrow{\text{transformée de Fourier (TF)}} P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, \theta) e^{-i2\pi\rho u} du$$



$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$\rho_x = \rho \cos \theta$$

$$\rho_y = \rho \sin \theta$$

$$du \cdot dv = dx \cdot dy$$

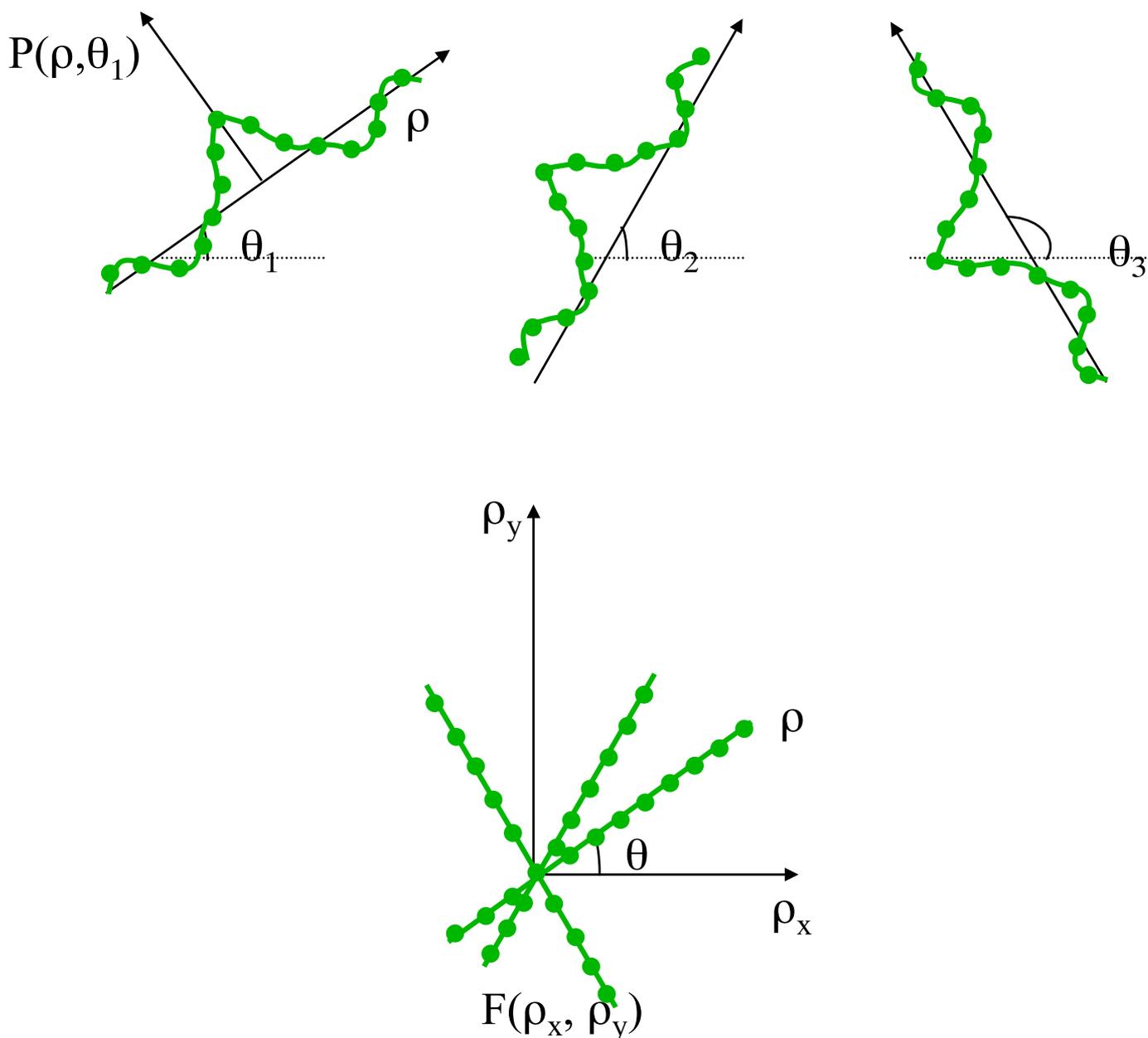
changement de variable :  $(u, v) \longrightarrow (x, y)$

$$P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\rho u} du dv \stackrel{\downarrow}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} dx dy$$

TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à  $u$   
 =  
 TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

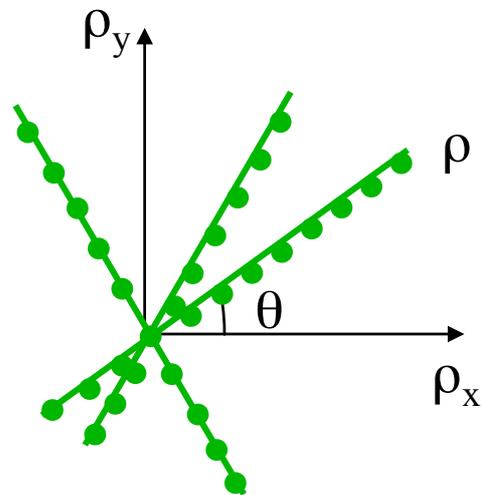
# Rétroprojection filtrée : principe

Si on a  $P(\rho, \theta)$  pour tous les angles  $\theta$  entre 0 et  $\pi$ , on peut reconstruire la transformée de Fourier de l'objet, et donc l'objet

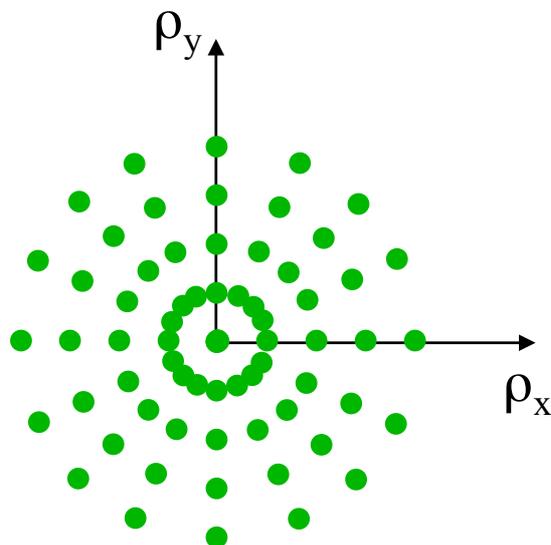


# Rétroprojection filtrée : origine du filtre

---



$F(\rho_x, \rho_y)$



L'échantillonnage dans l'espace de Fourier est irrégulier :  
la densité de points est proportionnelle à  $1/|\rho|$ .  
Il faut normaliser en conséquence.

# Rétroprojection filtrée : démonstration

$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y)$$

$$\text{TF}^{-1} \downarrow$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\rho_x, \rho_y) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

$$\text{TCC} \downarrow$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

changement de variable :  $(\rho_x, \rho_y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$$\downarrow$$

$$= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho \cos \theta \\ \rho_y &= \rho \sin \theta \\ \rho &= (\rho_x^2 + \rho_y^2)^{1/2} \\ d\rho_x \cdot d\rho_y &= \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \\ u &= x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi p'(u, \theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑  
projections filtrées

↑  
filtre rampe

objet  $f(x, y)$  à reconstruire  
=  
rétroprojection des projections filtrées

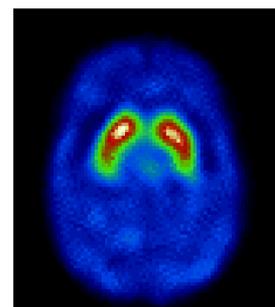
# Algorithme de rétroprojection filtrée

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$



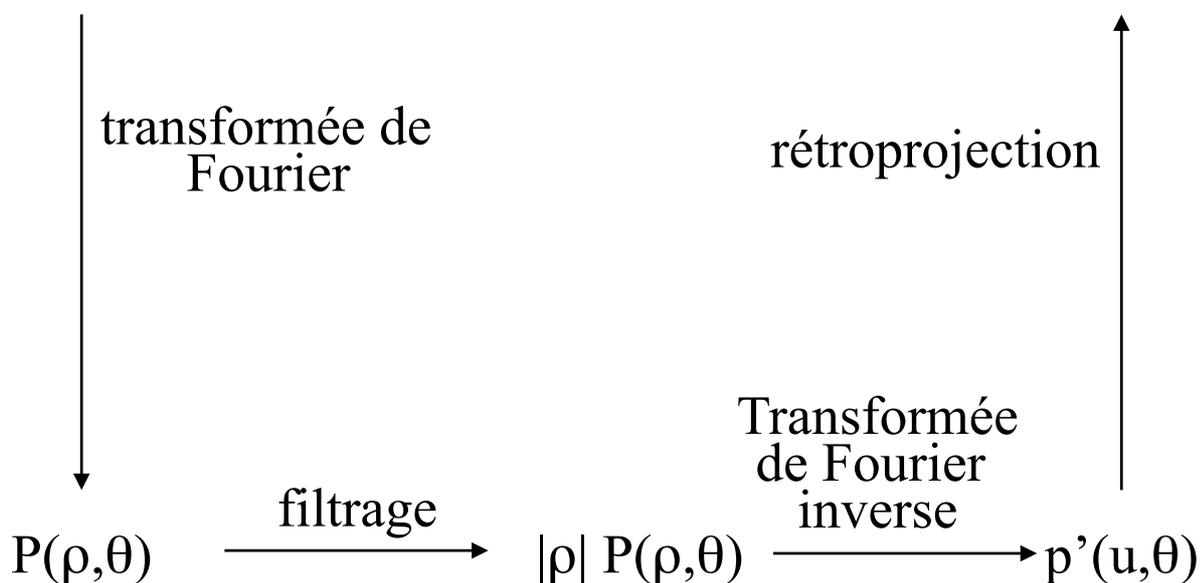
sinogramme

$p(u,\theta)$



coupe reconstruite

$f(x,y)$

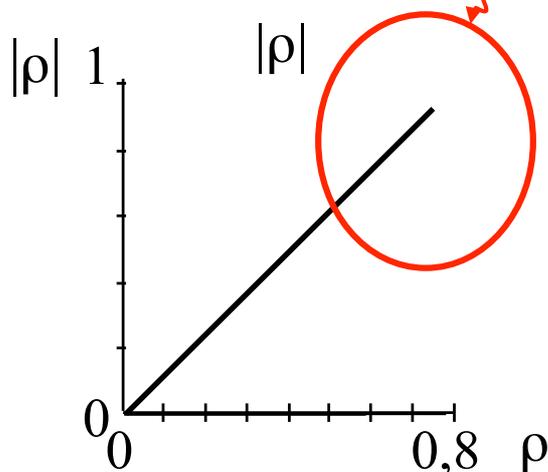


# Insuffisance du filtre rampe

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑  
filtre rampe

amplification des hautes fréquences



filtre rampe

hautes fréquences = détails dans les images (haute résolution spatiale)

mais aussi ... bruit parasite



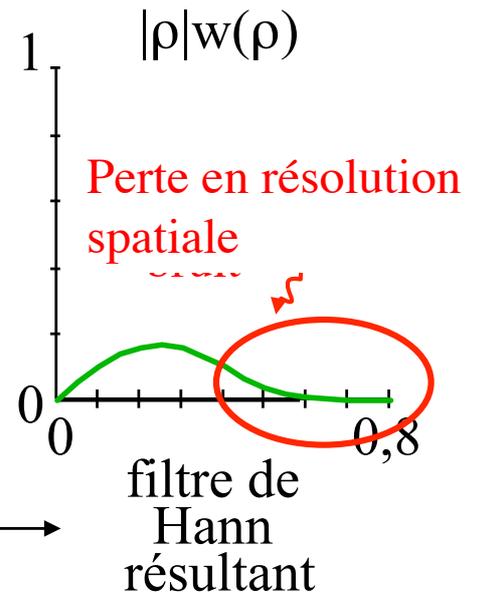
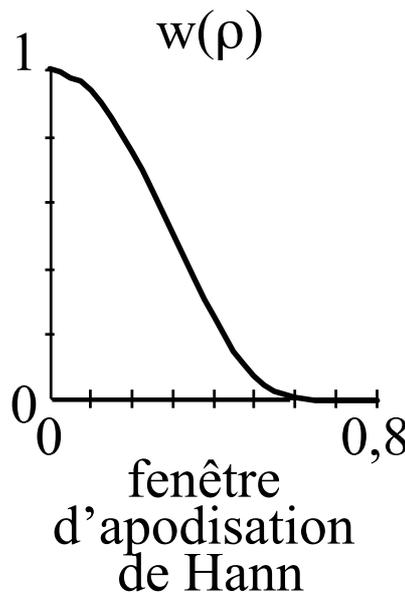
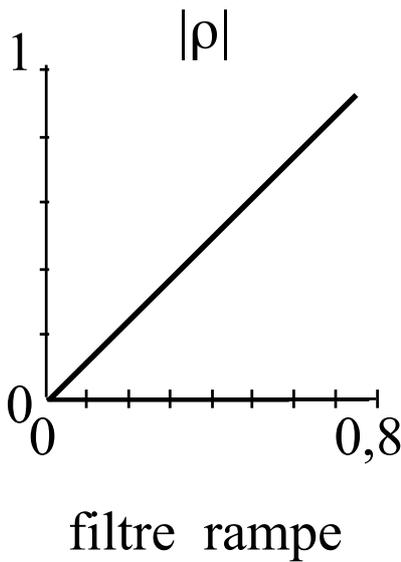
# Insuffisance du filtre rampe

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑  
filtre rampe

$$|\rho| \longrightarrow |\rho|w(\rho)$$

↑  
fenêtre d'apodisation

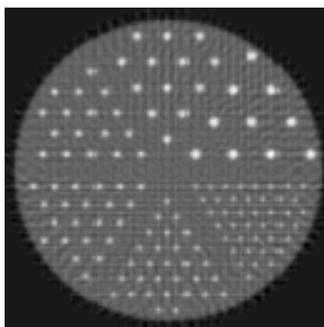


$$w(\rho) = \begin{cases} 0,5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases} \quad \text{domaine fréquentiel}$$

# Filtres classiques : filtre de Hann

- Filtre rampe

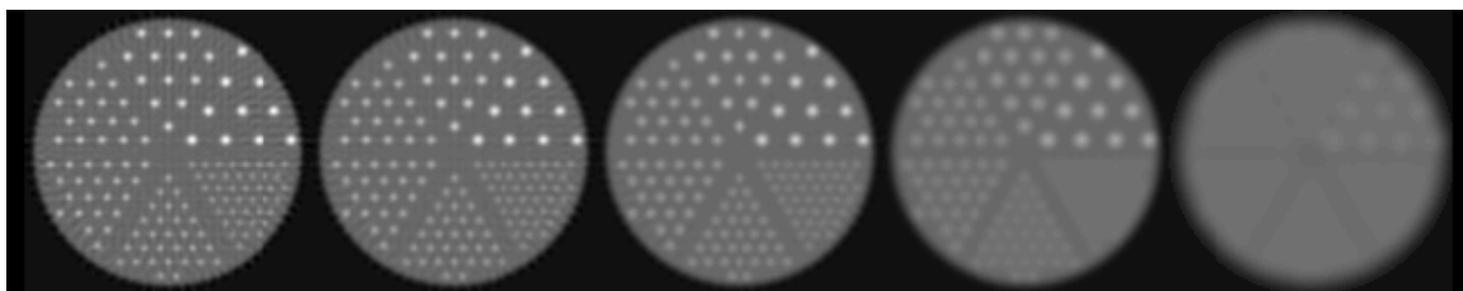
➡ meilleure résolution spatiale mais forte amplification du bruit haute fréquence



- Filtre de Hann

$$w(\rho) = \begin{cases} 0,5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases}$$

➡ modifie les moyennes fréquences



0,5

0,4

0,3

0,2

0,1

fréquence de coupure  $\rho_c$



➡ plus faible est la fréquence de coupure, moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage

# Filtrage

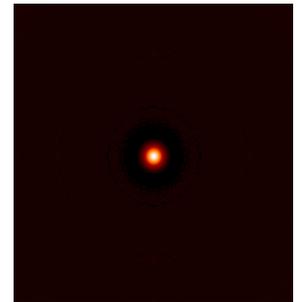
---

- Tout filtre fréquentiel a un équivalent dans l'espace « spatial »
- Le produit dans l'espace des fréquences correspond à la convolution dans l'espace spatial

# Principe d'un filtre spatial

Image originale

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	10	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0



Filtre

0	1	0
1	2	1
0	1	0

1/6

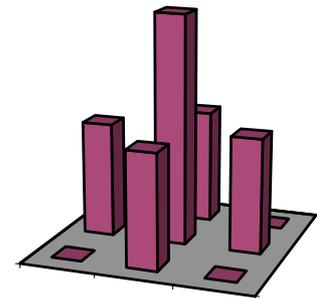
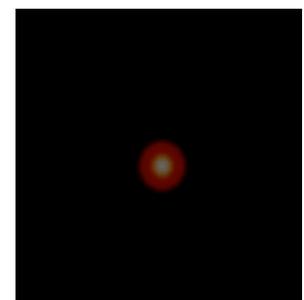


Image filtrée

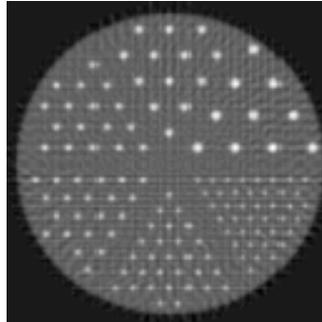
0	0	0	0	0
0	0	1,7	0	0
0	1,7	3,3	1,7	0
0	0	1,7	0	0
0	0	0	0	0



# Filtres classiques : filtre gaussien

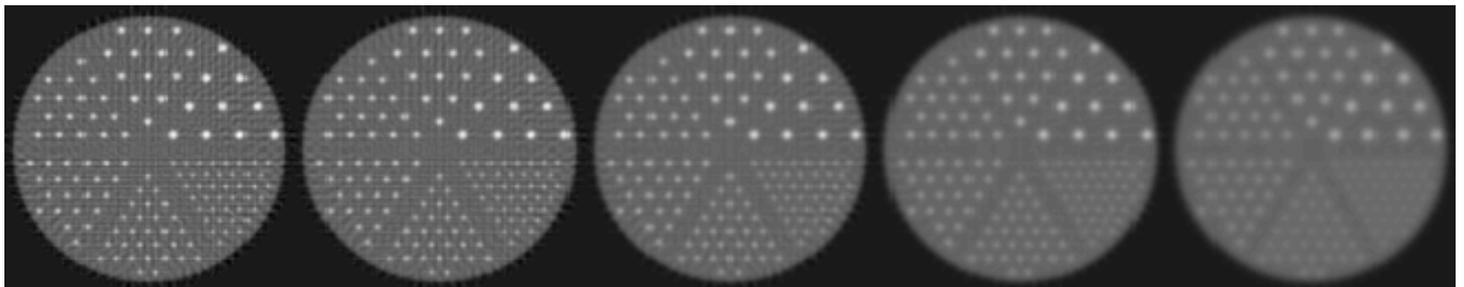
---

- Filtre rampe



- Filtre gaussien (domaine spatial)

$$c(x) = (1/\sigma \sqrt{2\pi}) \cdot \exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2]$$



0

1

2

3

4

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2} \sigma \text{ (pixel)}$$



Caractérise l'étendue spatiale du filtre

➡ plus grande est la dispersion du filtre gaussien (FWHM ou  $\sigma$ ),

moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage



# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection

- Calculer la rétroprojection filtrée  $(-0,5 ; 2 ; -0,5)$  des projections mesurées


6  
16  
8  
4

8 16 6 4


1  
25  
6  
2

4 25 2 3

←	0,25	0,25	0,25	0,25	1
←	6,25	6,25	6,25	6,25	25
←	1,5	1,5	1,5	1,5	6
←	0,5	0,5	0,5	0,5	2

	↑	↑	↑	↑
	1	6,25	0,5	0,75
	1	6,25	0,5	0,75
	1	6,25	0,5	0,75
	1	6,25	0,5	0,75
	4	25	2	3

# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection

←	0,25	0,25	0,25	0,25
←	6,25	6,25	6,25	6,25
←	1,5	1,5	1,5	1,5
←	0,5	0,5	0,5	0,5

1  
25  
6  
2

↑	1	6,25	0,5	0,75
↑	1	6,25	0,5	0,75
↑	1	6,25	0,5	0,75
↑	1	6,25	0,5	0,75

4 25 2 3

Moyenne :

Rapport **tumeur** / **fond**  
 $= 6,25 / 1,3 = 4,7$

1,25	3,25	0,4	0,5
3,6	6,25	2,75	2,75
2	3	1,75	1,5
0,7	3,4	1	0,6

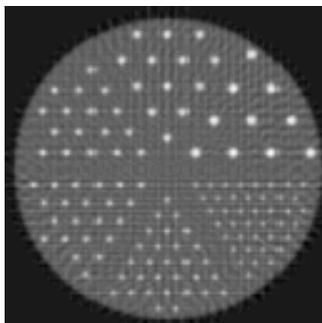
Image originale :

Rapport **tumeur** / **fond**  
 $= 10 / 1 = 10$

2	2	2	0
2	10	2	2
3	2	2	1
1	2	0	1

# Filtres classiques : filtre de Butterworth

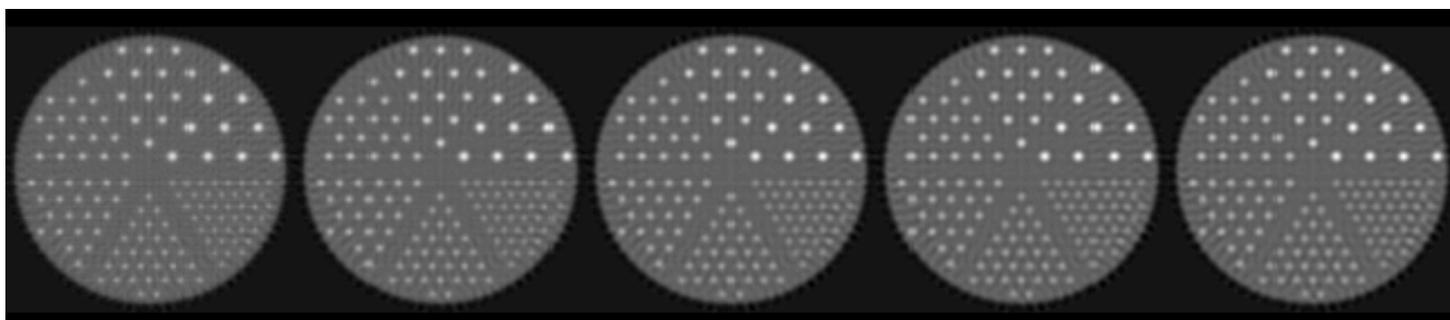
- Filtre rampe



- Filtre de Butterworth

$$w(\rho) = 1/[1+(\rho/\rho_c)^{2n}] \quad \text{si } \rho < \rho_c$$

➔ 2 paramètres : fréquence de coupure  $\rho_c$  et ordre  $n$



10

8

6

4

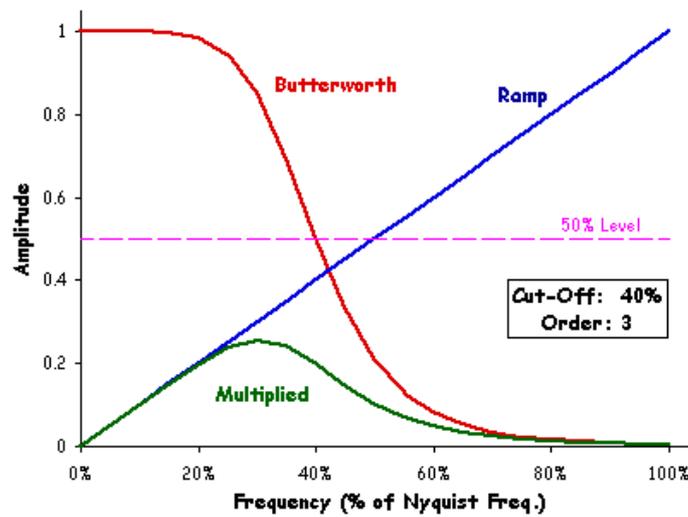
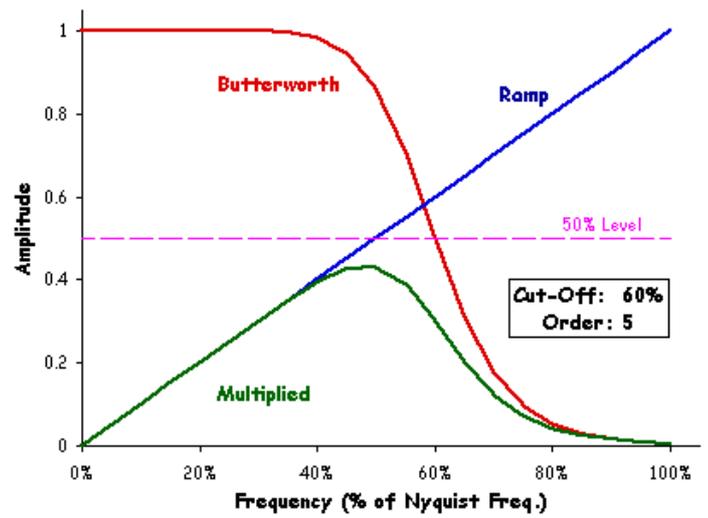
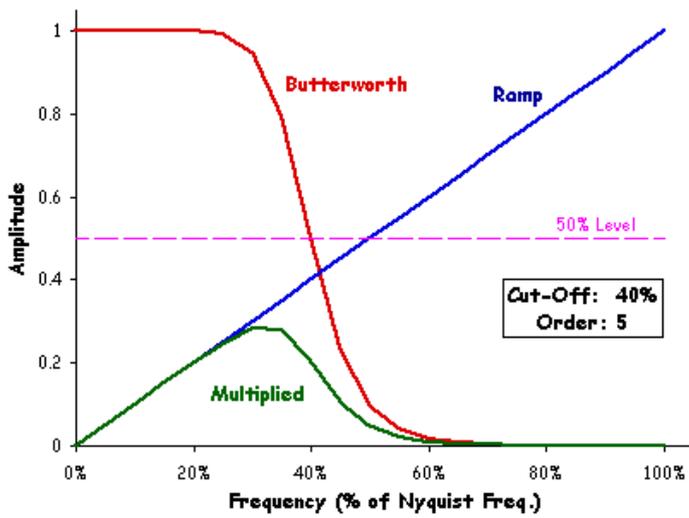
2

ordre  $n$ ,  $\rho_c=0,25$



➔ plus fort est l'ordre  
moins on préserve les détails "haute fréquence", i.e.,  
plus fort est le lissage

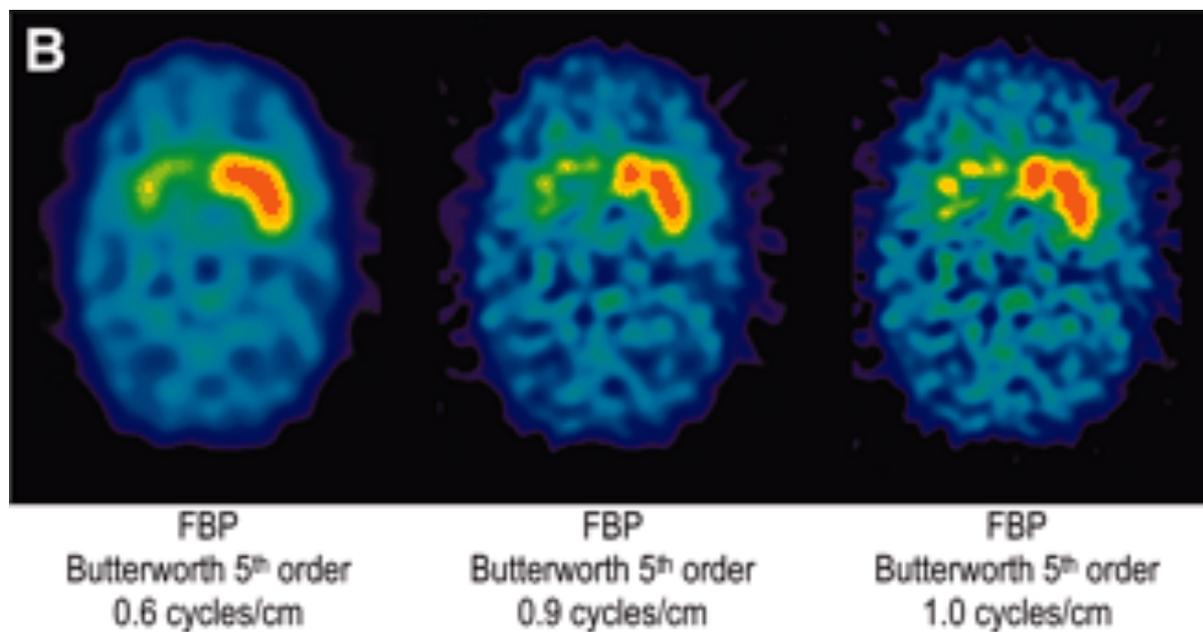
# Filtres classiques : filtre de Butterworth



# Importance de l'optimisation du filtre

---

- Un même filtre n'est pas adapté à toutes les situations



*Koch et al, J Nucl Med 2005*

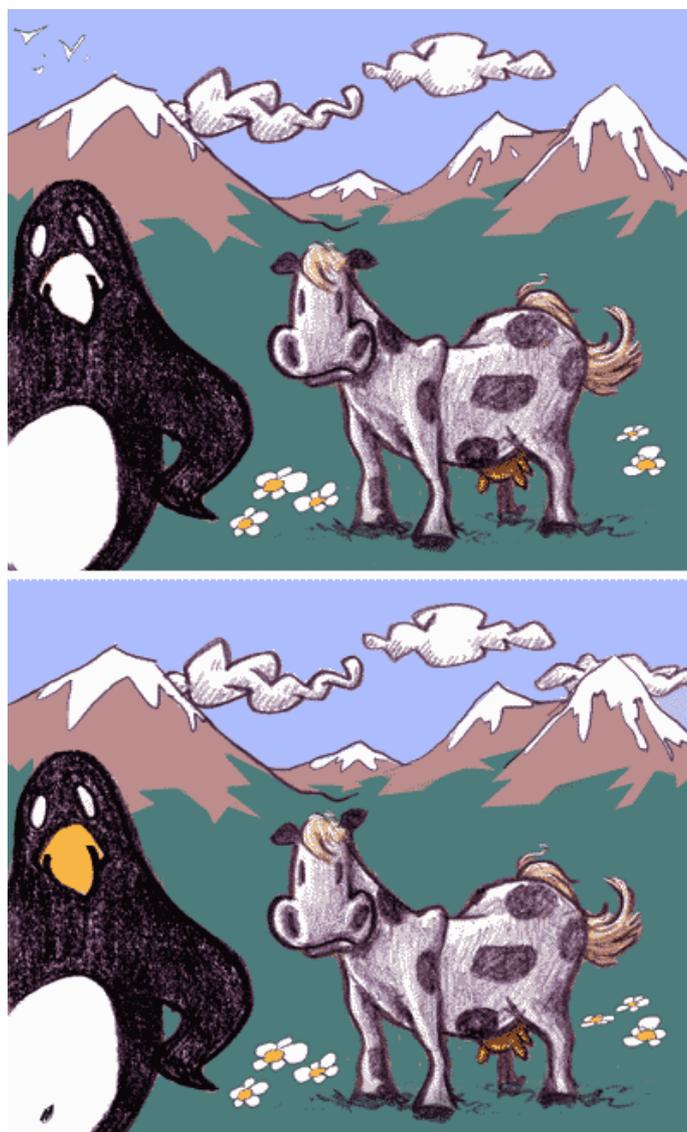
Le filtre devrait être optimisé en fonction de la finalité des images (détection, quantification, ...), de la statistique de comptage, etc



# Implémentation du filtre

---

Il existe plusieurs façons d'implémenter un même filtre (e.g., espace spatial ou espace des fréquences) : l'usage d'un même filtre peut conduire à des résultats légèrement différents d'une console à l'autre



bec jaune, nombril, pingouin, oiseau, fleur, nuage, neige  
montagne... et oreille gauche de la jument

# Méthodes de reconstruction analytique : discussion

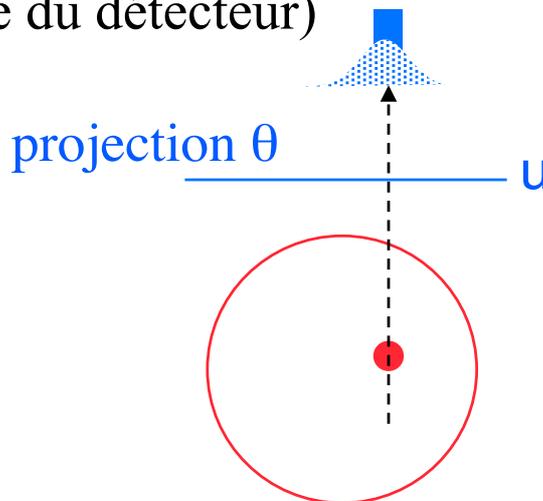
---

- Rapide, simple à implémenter



- Linéaire (fixation double, valeur  $\times 2$  dans les images)
- Bruit / résolution spatiale réglables via le filtre
- Cependant, beaucoup d'approximations non vérifiées en pratique :

- modèle de lignes intégrales (résolution spatiale parfaite du détecteur)



- pas de prise en compte des fluctuations statistiques
- pas de prise en compte des perturbations physiques (atténuation, diffusion)
- données bruitées et sous-échantillonnées

➡ Approche alternative : la reconstruction discrète, ou itérative

# Deux approches à la reconstruction tomographique

---

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R f$$

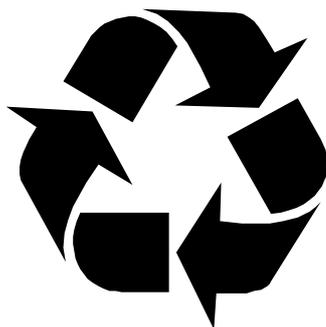
# Méthodes de reconstruction itératives : introduction

---

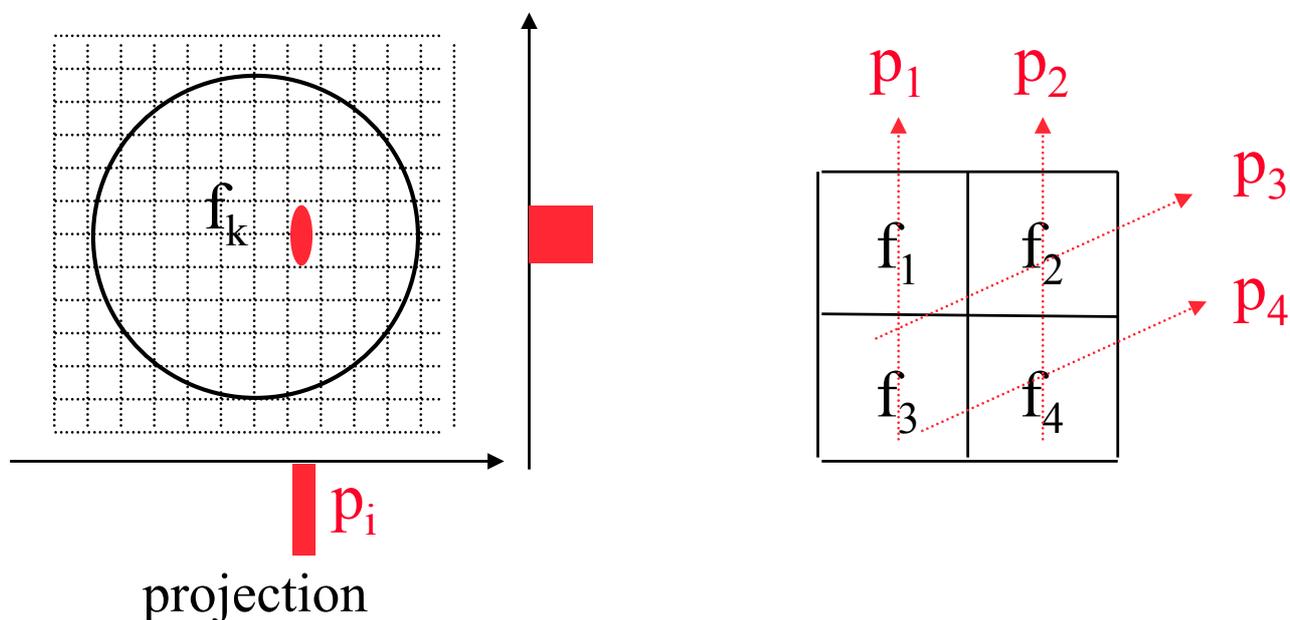
- Expression discrète et matricielle du problème de reconstruction tomographique  
Plus d'intégrales !

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & & & r_{14} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ r_{41} & & & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

- Inversion itérative du système d'équations



# Expression discrète du problème de reconstruction



$$\begin{aligned} p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4 \\ p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24} f_4 \\ p_3 &= r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34} f_4 \\ p_4 &= r_{41} f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44} f_4 \end{aligned}$$

En pratique :  
système d'équations de grande taille  
128 projections 128 x 128

2 097 152 équations à autant d'inconnues

# Expression matricielle du problème de reconstruction

---

$$\begin{aligned} p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4 \\ p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24} f_4 \\ p_3 &= r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34} f_4 \\ p_4 &= r_{41} f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44} f_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

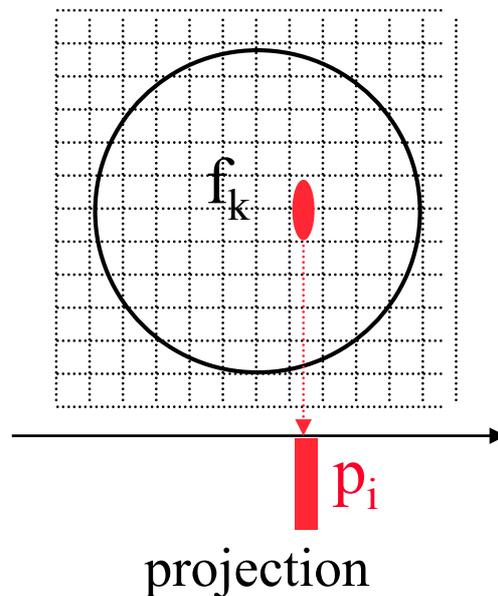
$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{f} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \text{projections} & & \text{objet à} \\ \text{acquises} & \text{opérateur} & \text{reconstruire} \\ & \text{de projection} & \end{array}$$

➔ **Problème : déterminer  $f$  connaissant  $p$  et  $R$**

A quoi correspond  $R$  ?

---

$$p = R f$$

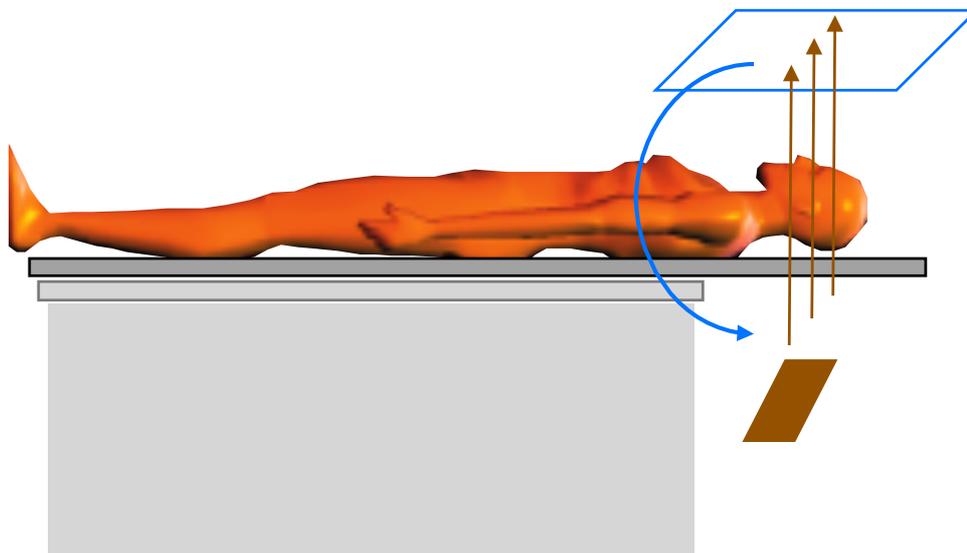


$R$  décrit le processus de projection, i.e. le processus de formation des images :  
modélisation du modèle direct

$R_{ik}$  : probabilité qu'un événement émis dans le pixel  $k$  soit détecté dans le pixel de projection  $i$

$R$  = matrice système

# Dimension du problème



$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{f}$$

↑
↑
↑

projections  
acquises
                    
 opérateur  
de projection
                    
 objet à  
reconstruire

$$\begin{aligned} p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + \dots + r_{1F} f_F \\ p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + \dots + r_{2F} f_F \\ &\dots \\ p_P &= r_{P1} f_1 + r_{P2} f_2 + \dots + r_{PF} f_F \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1F} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{P1} & \dots & r_{PF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_F \end{bmatrix}$$

• Exemple : 120 projections de 128 lignes (direction axiale) et 64 colonnes (bins de projection)

- Pour reconstruire une coupe :

64 x 120 équations

64 x 64 inconnues

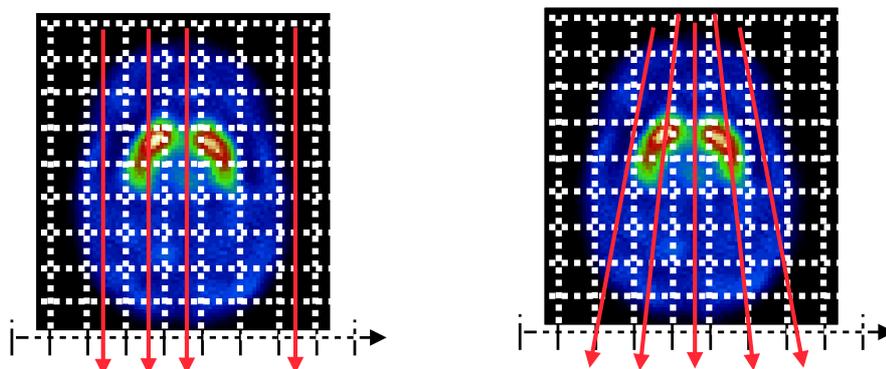
R est une matrice (64 x 120 ; 64 x 64)

# Expression de l'opérateur de projection R

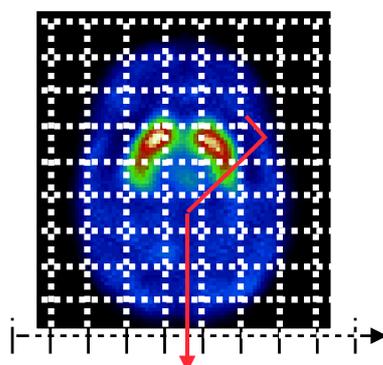
---

## Deux aspects

- Modélisation de la géométrie de détection



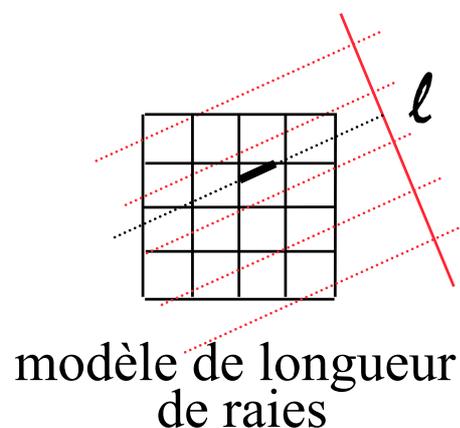
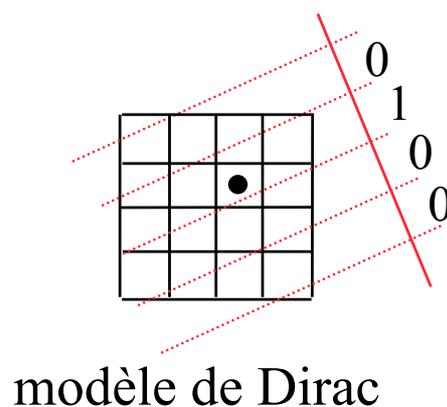
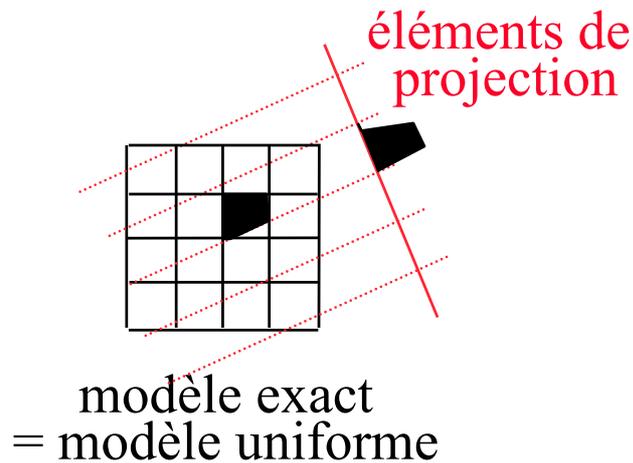
- Modélisation de la physique de détection



# Modélisation géométrique de l'opérateur R

---

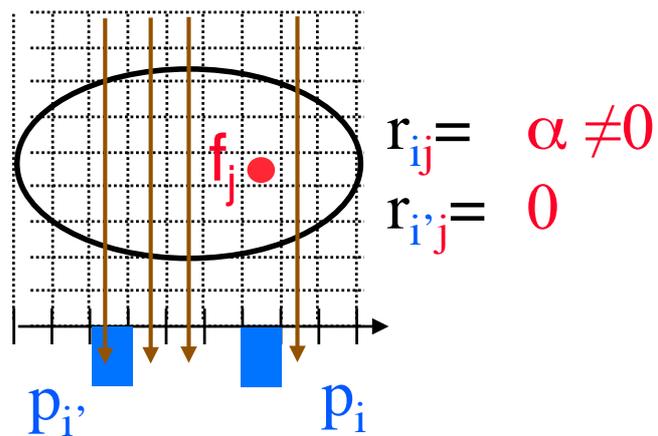
- Modèle de distribution de l'intensité des pixels :  
détermination de la contribution de chaque pixel  $i$  à un  
élément de projection  $k$



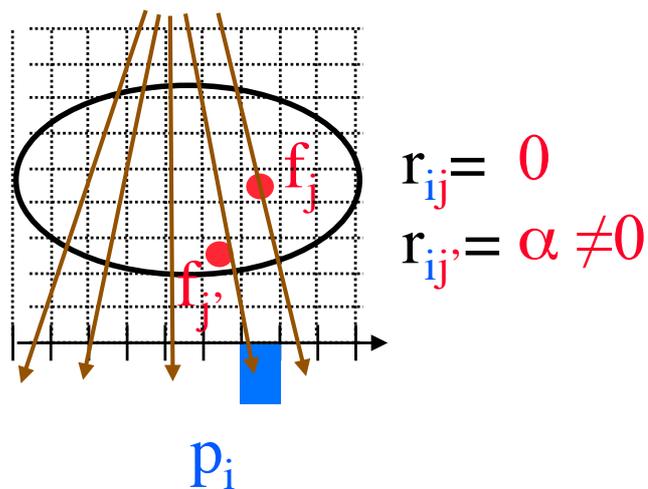
# Modélisation géométrique de l'opérateur R

- Modèle de la géométrie de détection (collimation)

géométrie parallèle

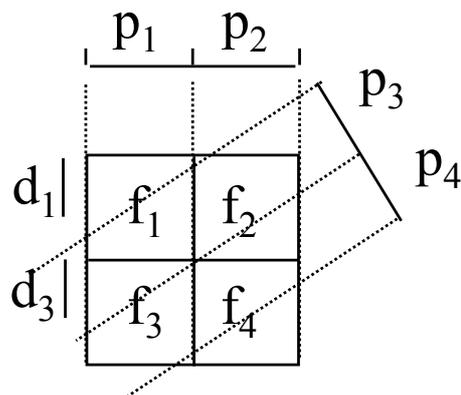


géométrie en éventail



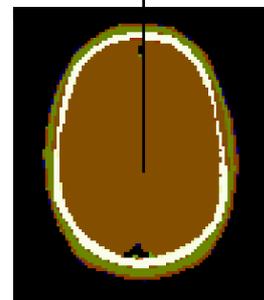
# Modélisation physique de l'opérateur R (1)

- Atténuation du signal (SPECT et PET)



contribution géométrique

$$p_1 = g_{11} f_1 \exp(-\mu_1 d_1) + g_{13} f_3 \exp(-\mu_3 d_3 - 2 \mu_1 d_1)$$



carte des  $\mu$

Dans ce cas :

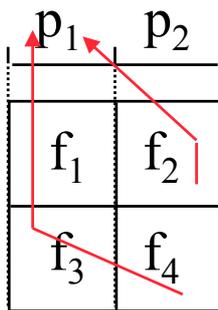
$$r_{11} = g_{11} \exp(-\mu_1 d_1)$$

$$r_{13} = g_{13} \exp(-\mu_3 d_3 - 2 \mu_1 d_1)$$

## Modélisation physique de l'opérateur R (2)

---

- Diffusion (SPECT et PET)



sans modélisation de la diffusion :

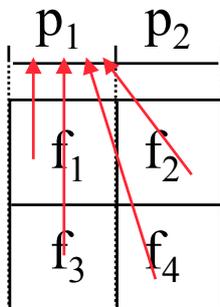
$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{13} f_3$$

avec modélisation de la diffusion :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4$$

# Modélisation physique de l'opérateur R (3)

- Réponse du détecteur

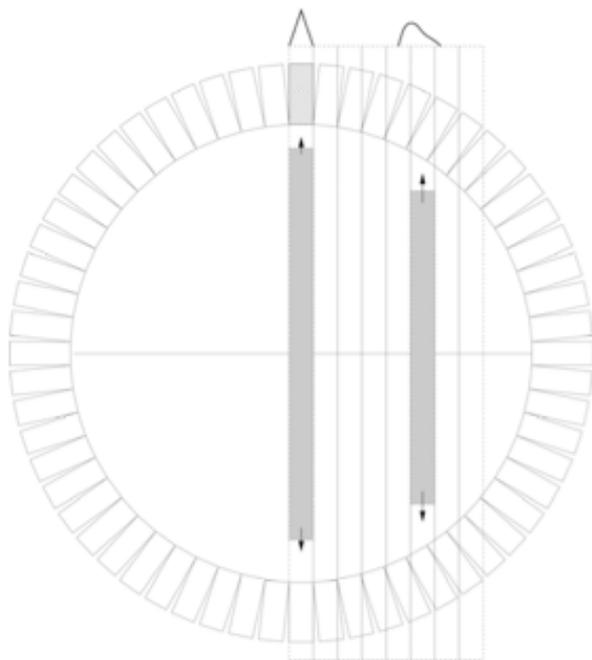


sans modélisation de la fonction de réponse du détecteur :

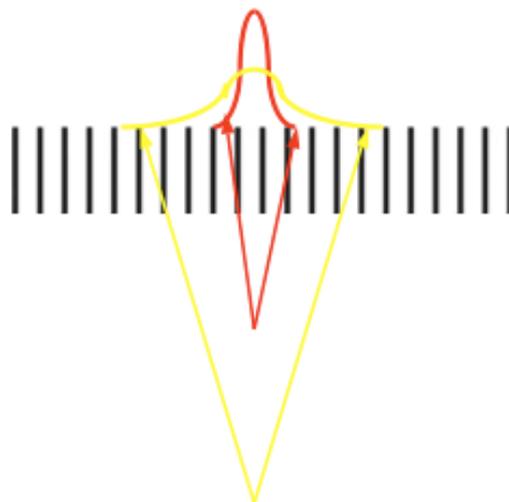
$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{13} f_3$$

avec modélisation :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4$$

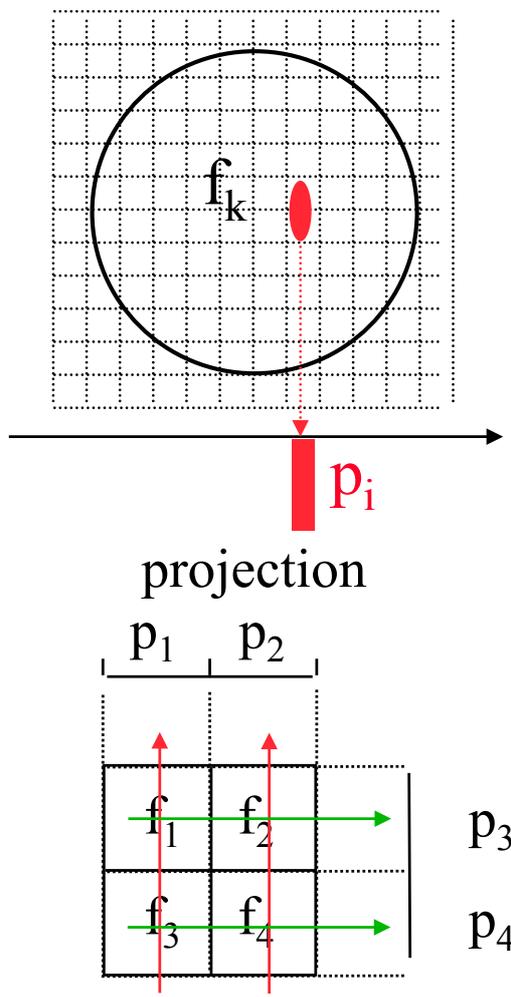


PET



SPECT

# Opérateur de projection R discret



$$\begin{aligned}
 p_1 &= f_1 + f_3 \\
 p_2 &= f_2 + f_4 \\
 p_3 &= f_1 + f_2 \\
 p_4 &= f_3 + f_4
 \end{aligned}$$



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Mise en oeuvre

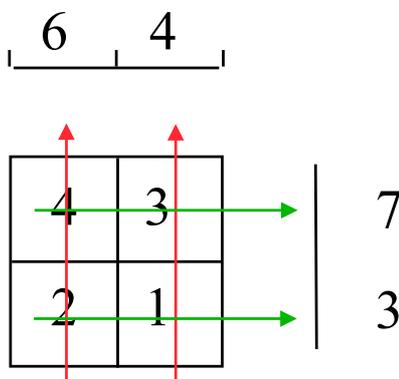
---

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

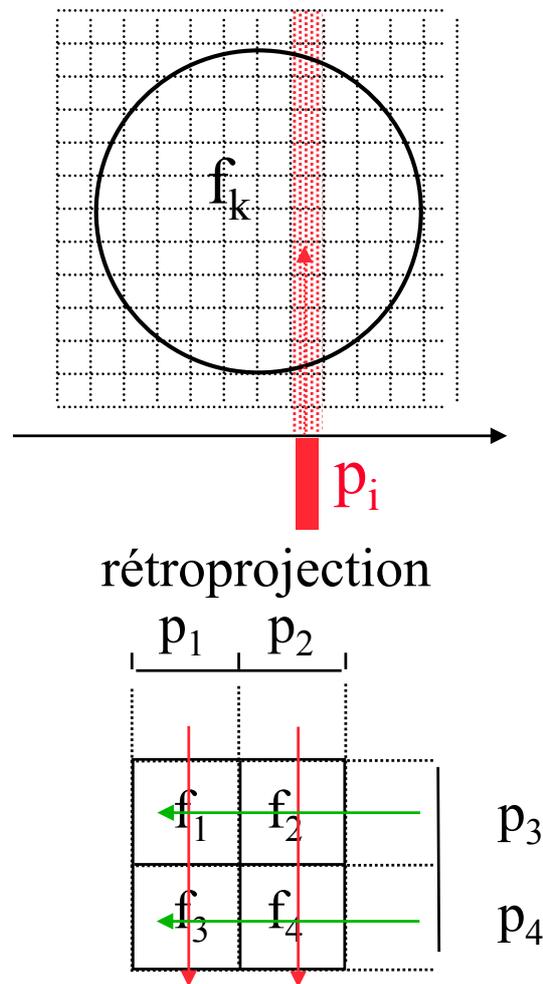
Calculer les projections de l'objet (4 3 2 1) :

$$\begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Représentation totalement équivalente :



# Opérateur de rétroprojection discret



$$f^*_1 = p_1 + p_3$$

$$f^*_2 = p_2 + p_3$$

$$f^*_3 = p_1 + p_4$$

$$f^*_4 = p_2 + p_4$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^t$$

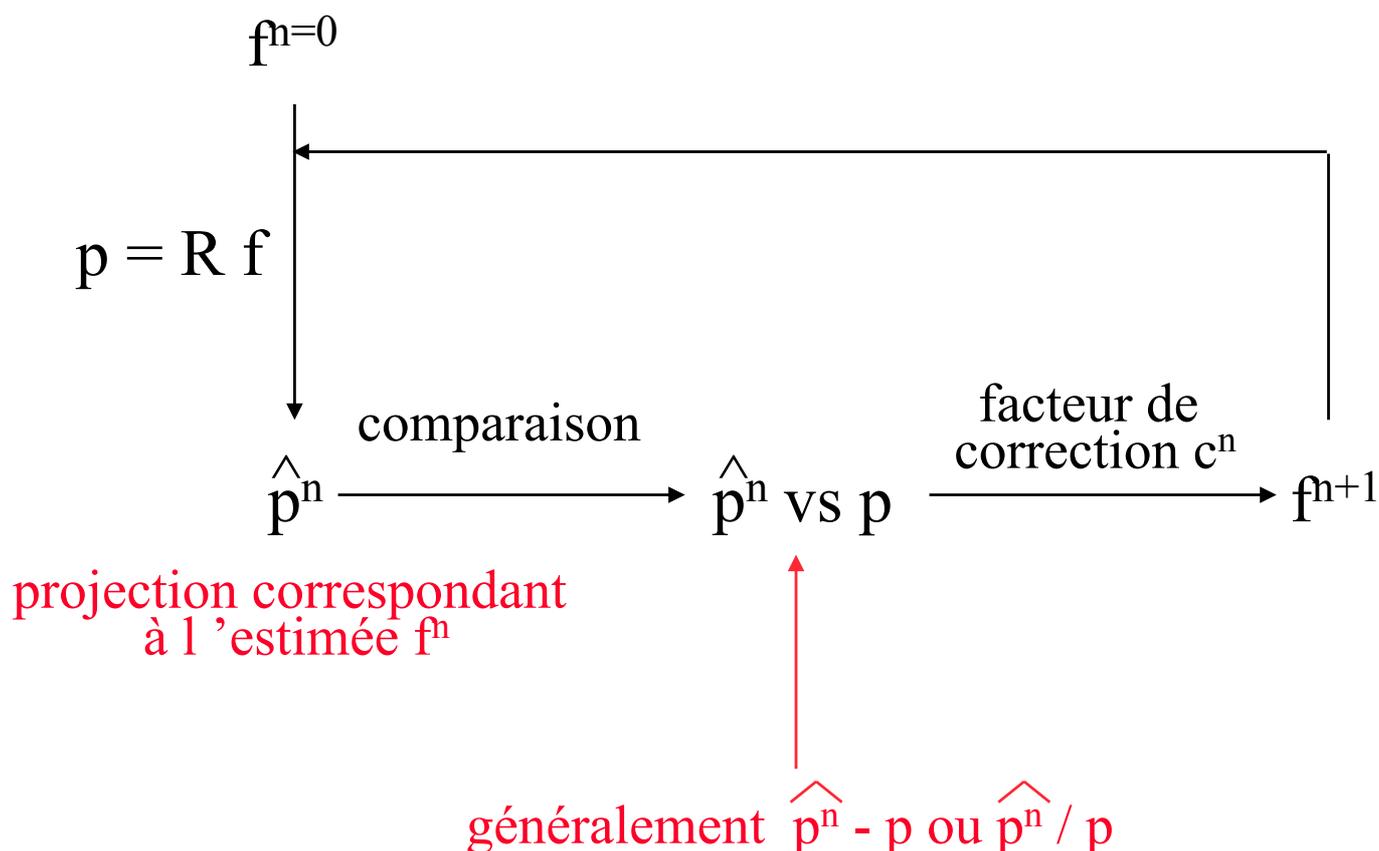
# Résolution du problème inverse

---

$$p = R f$$

Recherche d'une solution  $f$  minimisant une distance  $d(p, Rf)$ ,  $p$  et  $R$  étant connus

estimée initiale de  
l'objet à reconstruire



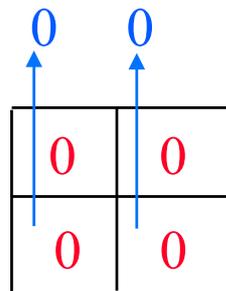
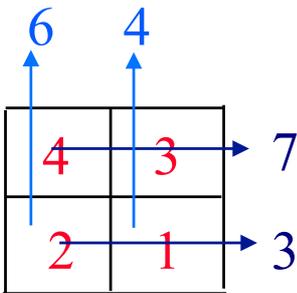
# Deux classes de méthodes discrètes itératives

---

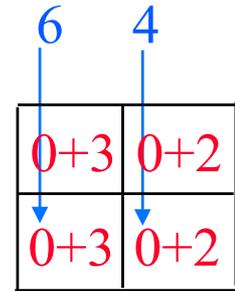
- Méthodes algébriques
  - méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires
  - minimisent  $\|p - R f\|_2^2$
  - ART, SIRT, ILST, gradient conjugué, etc
  
- Méthodes statistiques
  - estimation bayésienne
  - prennent en compte le bruit dans les données
  - maximisent une fonction de vraisemblance
  - MLEM, OSEM, RAMLA, DRAMA

# Exemple de méthode algébrique : ART

- Algebraic reconstruction technique

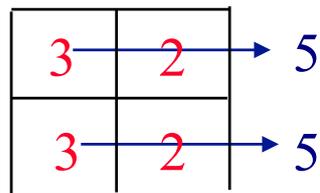


comparaison par soustraction

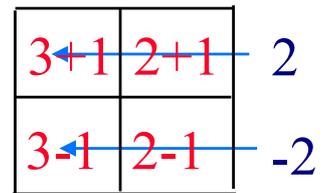


rétroprojection des différences

f0

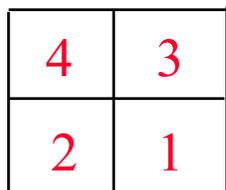


comparaison par soustraction



rétroprojection des différences

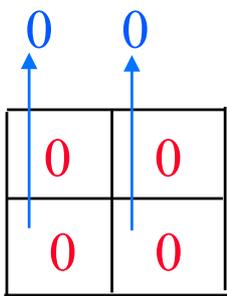
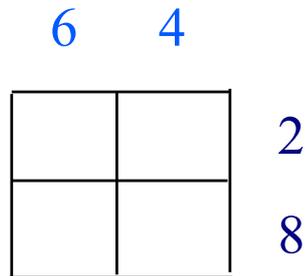
f1



f2

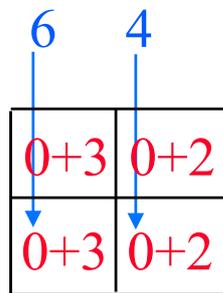


# Solution par ART

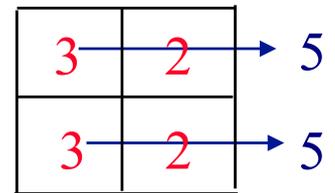


f0

comparaison par soustraction

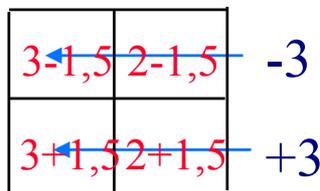


rétroprojection des différences



f1

comparaison par soustraction



rétroprojection des différences



f2

# Inconvénients des méthodes algébriques

---

- Les méthodes algébriques ignorent le bruit présent dans les données
- Elles consistent uniquement à résoudre un grand système d'équations linéaires

Les méthodes statistiques modélisent les propriétés statistiques :

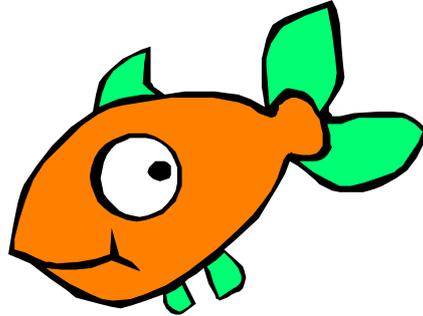
- des projections mesurées
- de l'objet à reconstruire (méthodes bayésiennes)



# Importance de modéliser le bruit des projections

---

- Bruit de Poisson (comptage)



- PET Gemini TF
  - 44 couronnes de 644 cristaux LSO (4 mm x 4 mm x 22 mm)
  - $\sim 4 \cdot 10^8$  lignes de réponses joignant 2 cristaux

On injecte  $\sim 10$  mCi = 370 MBq  
Acquisition de 5 min

Nombre de désintégrations  $\beta^+$  =  $370 \cdot 10^6 \times 5 \times 60 = 1,11 \cdot 10^{11}$

Effet de l'atténuation :  $\exp(-0,097 \times 30) = 0,0544$   
soit  $6 \cdot 10^9$  coïncidences arrivant sur le détecteur

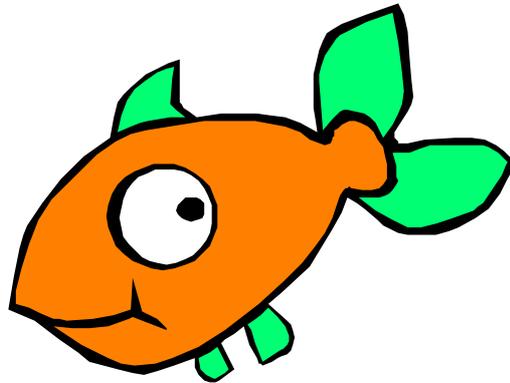
Effet de l'efficacité (2%)  
soit  $1,2 \cdot 10^8$  coïncidences détectées

Soit  $1,2 \cdot 10^8 / 4 \cdot 10^8 = 0,3$  coïncidence par LOR !

# Méthode statistique : MLEM

---

- MLEM = Maximum Likelihood Expectation Maximization
- Utilise une formulation probabiliste du problème de reconstruction : suppose que les données mesurées (sinogrammes ou projections) obéissent à une statistique de Poisson



Avantage : modélise explicitement le bruit dans les données



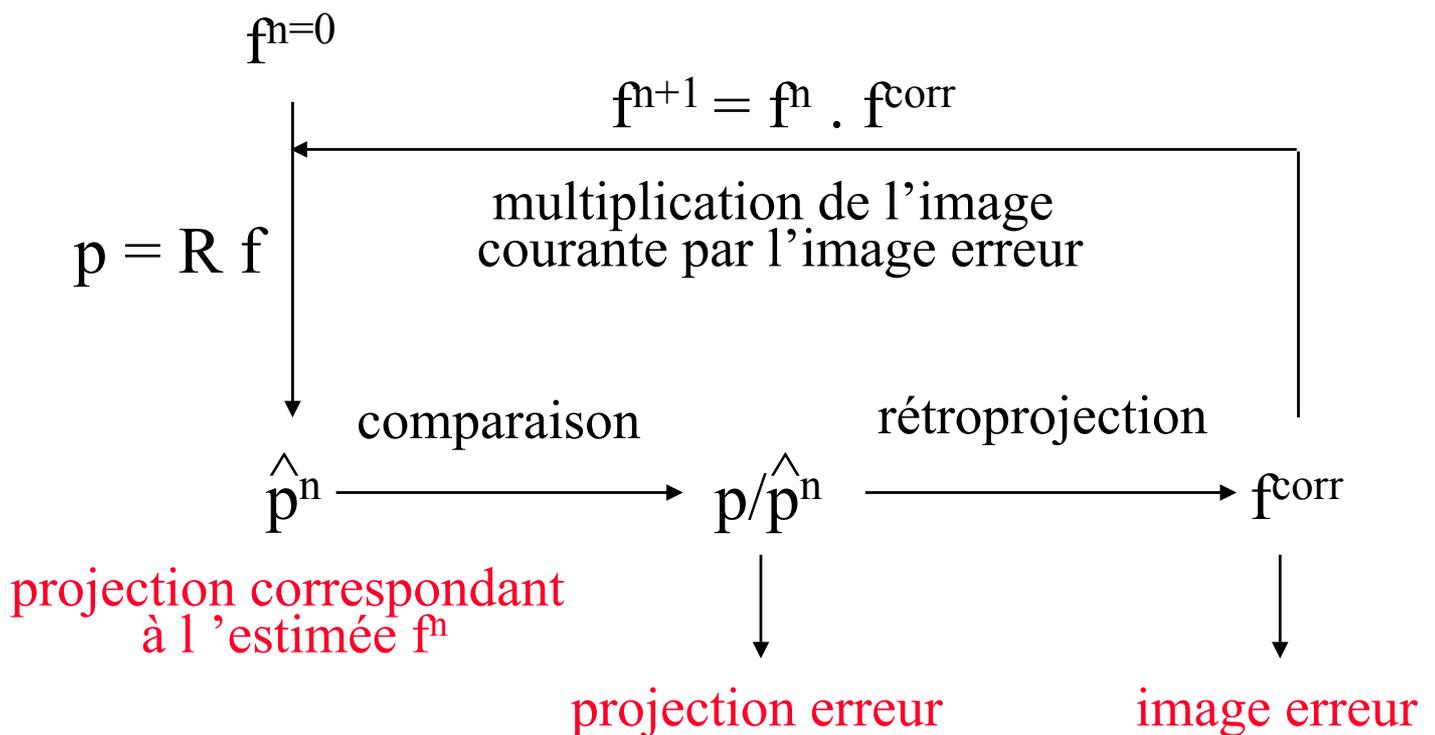
Ceci implique que si on modifie les projections avant la reconstruction, il se peut que MLEM ne soit plus adapté théoriquement

# Algorithme MLEM

- Formule de mise à jour :

$$f^{n+1} = f^n \cdot R^t [ p / p^n ]$$

estimée initiale de  
l'objet à reconstruire



1. On part d'une estimée  $f^n$
2. On calcule sa projection :  $p^n = R f^n$ .
3. On fait le rapport avec les projections mesurées :  $p/p^n$
4. On rétroprojette  $R^t[p/p^n]$
5. On normalise ( $\times 1/s$ ) par la sensibilité  $s$  du scanner et on multiplie par l'estimée courante  $f^n$  de l'image :  $f^{n+1}$

# Algorithme MLEM

---



Propriétés de MLEM :

- \* solution toujours positive ou nulle
- \* convergence lente
- \* méthode itérative la plus utilisée en SPECT (dans sa version accélérée OSEM)
- \* non linéaire !

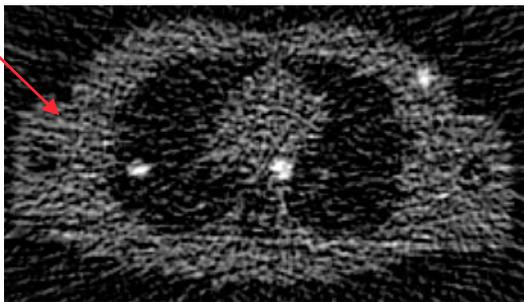
Par exemple, pour une acquisition TEP synchronisée à la respiration, l'image reconstruite à partir des données non synchronisées n'est pas identique à la somme des images synchronisées !

\* biais (sur-estimation de l'activité) dans les régions à très faible signal

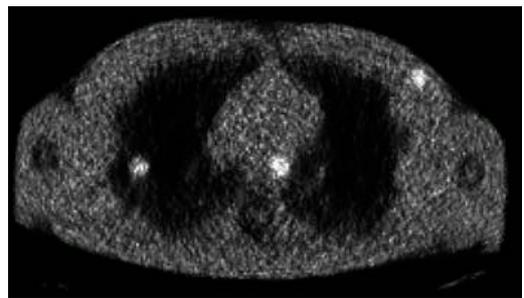
# Exemple

---

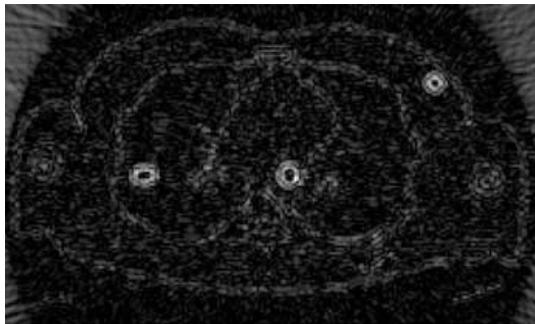
FBP (Hamming)



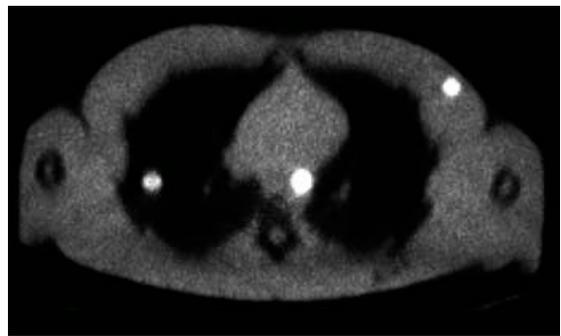
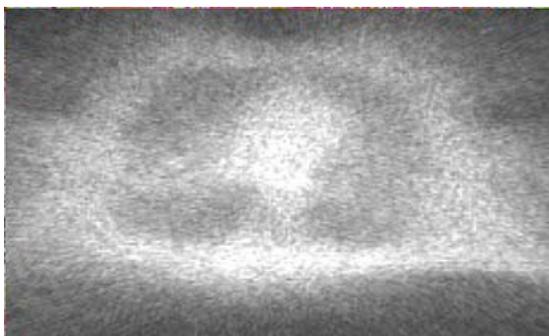
MLEM  
(32 itérations)



Images reconstruites



Biais ( $\hat{f}-f$ )

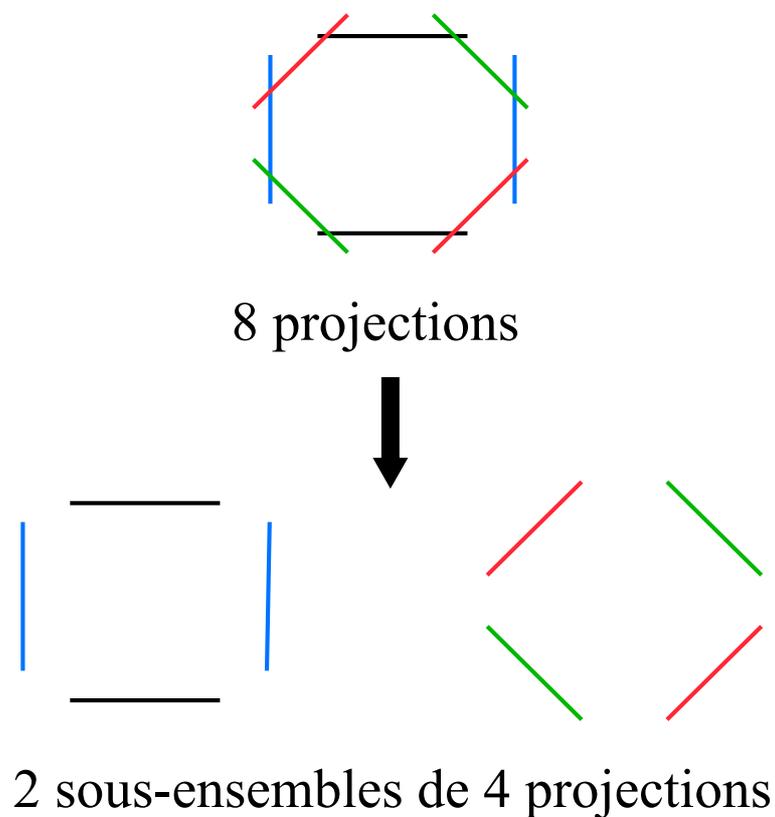


Variance

# Version accélérée de MLEM : OSEM

---

- OSEM = Ordered Subset Expectation Maximisation
- Tri des P projections en sous-ensembles ordonnés  
Exemple :



# Version accélérée de MLEM : OSEM

---

- Application de MLEM sur les sous-ensembles :

- itération 1 :

estimation de  $f^1$  à partir de l'initialisation  $f^0$  et des projections  $p^{0_{s1}}$  correspondant au sous-ensemble  $s1$

$$f^1 = f^0 \cdot R^t [ p / p^{0_{s1}} ]$$

estimation de  $f'^1$  à partir de  $f^1$  et des projections  $p'^{0_{s2}}$  correspondant au sous-ensemble 2

$$f'^1 = f^1 \cdot R^t [ p / p'^{0_{s2}} ]$$

- itération 2 :

estimation de  $f^2$  à partir de  $f'^1$  et des projections  $p^{1_{s1}}$  correspondant au sous-ensemble 1

$$f^2 = f'^1 \cdot R^t [ p / p^{1_{s1}} ]$$

estimation de  $f'^2$  à partir de  $f^2$  et des projections  $p'^{1_{s2}}$  correspondant au sous-ensemble 2

$$f'^2 = f^2 \cdot R^t [ p / p'^{1_{s2}} ]$$

etc.

**OSEM avec S sous-ensembles et I iterations**

**⇔ SI itérations de MLEM**

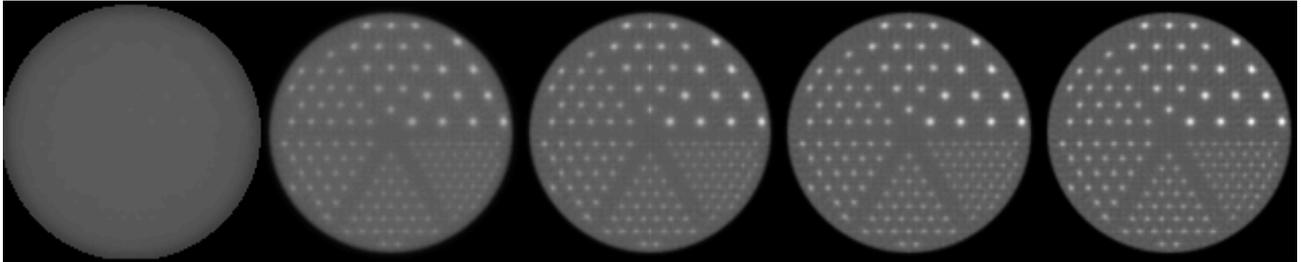
**mais S fois plus rapide !!!**

**Attention : utiliser au moins 4 projections par sous-ensemble !**

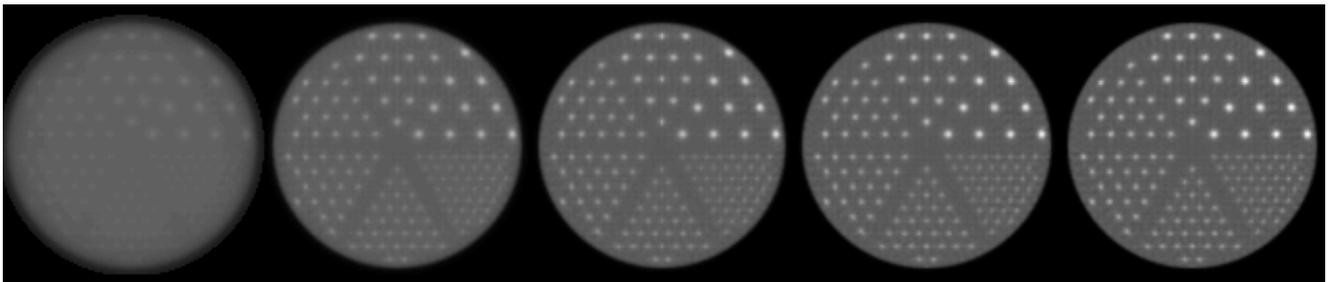
# Caractéristiques de OSEM



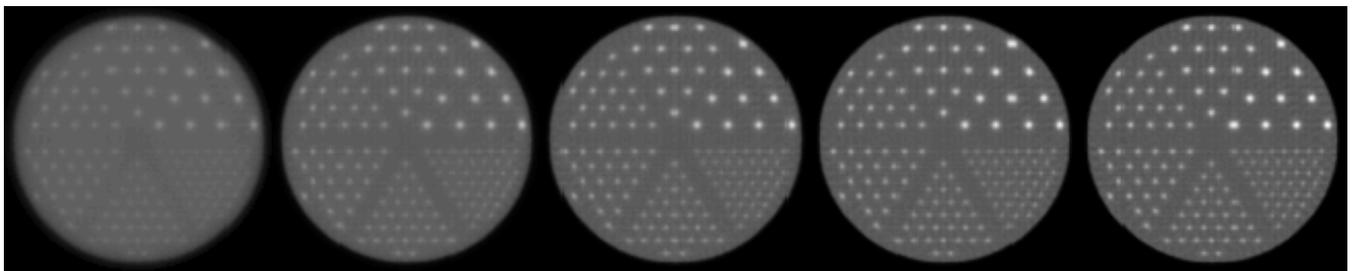
MLEM 1                      16                      24                      32                      40 itér.



OSEM 1                      4                      6                      8                      10 itér.  
4 ss-ens.



OSEM 1                      2                      3                      4                      5  
8 ss-ens.



**Spécifier un nombre d'itérations OSEM sans nombre de sous-ensembles n'a pas de sens !**

# Composantes génériques d'un algorithme itératif

---

5 composantes à définir :

- description de la « représentation » de la distribution d'activité
  - matrice de voxels
  - fonctions « blobs »
- matrice système R
  - décrit le lien entre objet et mesure
  - intègre les effets géométriques et physiques
- modèle associé aux données
  - données suivant une statistique de Poisson
  - données suivant une distribution gaussienne
- fonction objectif
  - log-vraisemblance
  - maximum a posteriori
  - moindres carrés pondérés
  - ...
- stratégie d'optimisation de la fonction objectif
  - maximisation de l'espérance
  - algorithme de descente
  - ...

**Tous les algorithmes itératifs peuvent être décrits ainsi et varient par ces composantes**

## Autres algorithmes itératifs

---



- RAMLA (row action maximum likelihood algorithm) est un cas particulier de OSEM :
  - le nombre de sous-ensembles est égal au nombre de projections
  - un paramètre de relaxation permet de contrôler le bruit
  - chez Philips, RAMLA est utilisé avec une base de fonctions « blobs », mais ceci n'est pas inhérent à RAMLA
  
- DRAMA, SAGE, SMART, Gradient Conjugué, ...

# Caractéristiques des méthodes itératives

---

- Plus élevé est le nombre d'itérations, meilleure est la restitution des hautes fréquences



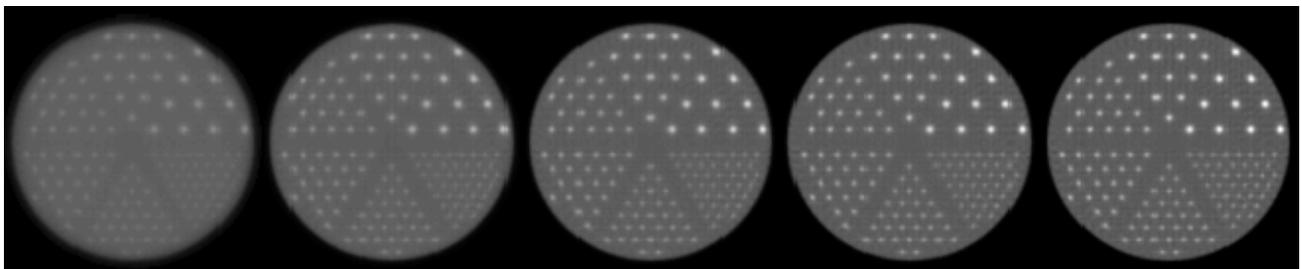
OSEM 1  
8 ss-ens.

2

3

4

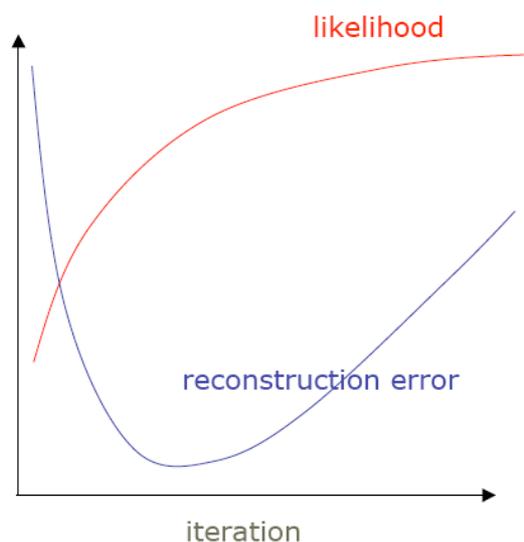
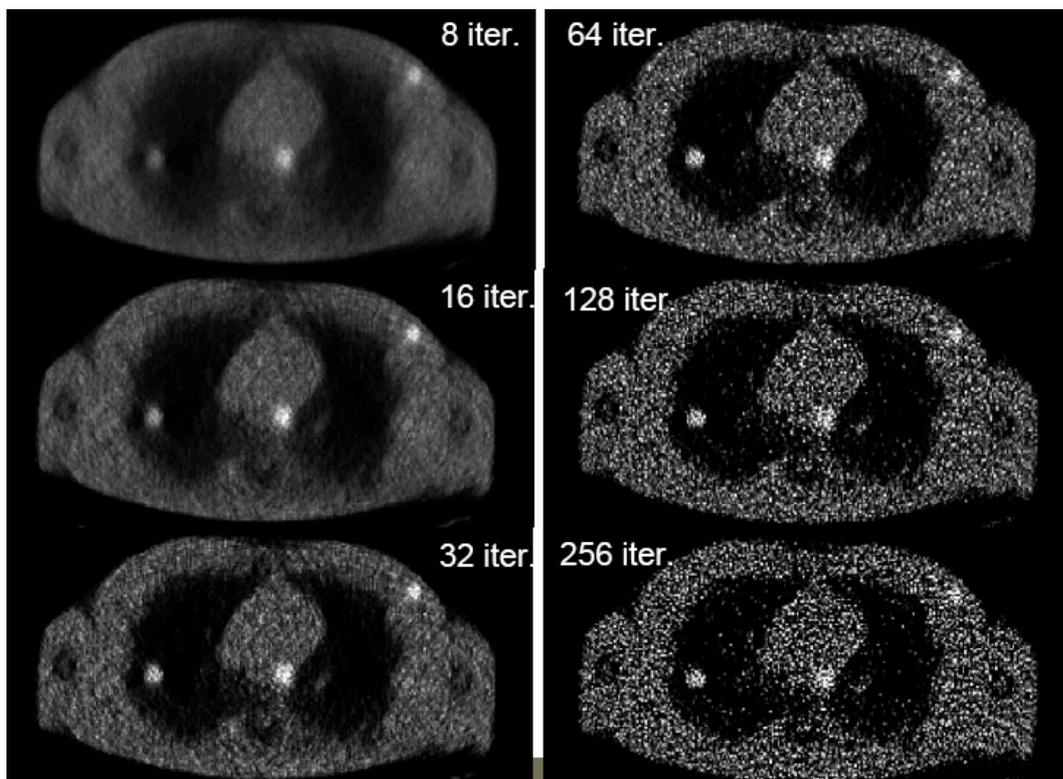
5



- Le choix du nombre d'itérations conditionne le compromis résolution spatiale vs bruit
- Le nombre d'itérations devrait être optimisé en fonction de la finalité des images (comme le filtre en reconstruction itérative)

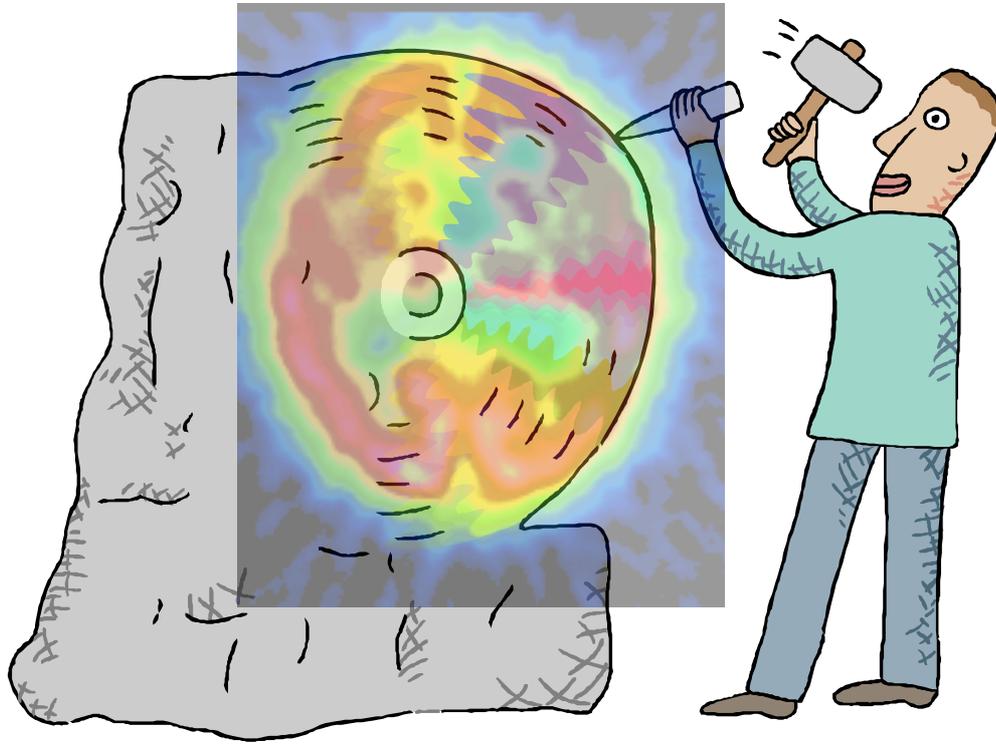
# Caractéristiques des méthodes itératives

- Problème du choix du nombre d'itérations
  - convergence vers la solution puis divergence de la procédure lors de la reconstruction des très hautes fréquences du fait de la présence de bruit (haute fréquence)



# Régularisation

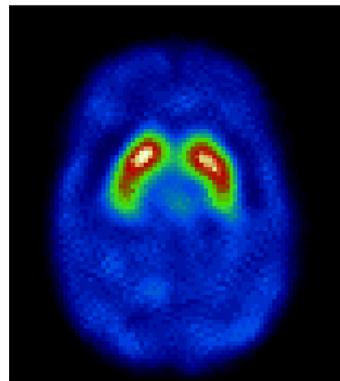
---



Faire tendre la solution vers ce à quoi on s'attend



peu probable



probable

Pénaliser les solutions peu probables et favoriser les solutions compatibles avec des a priori

# Trois approches de régularisation

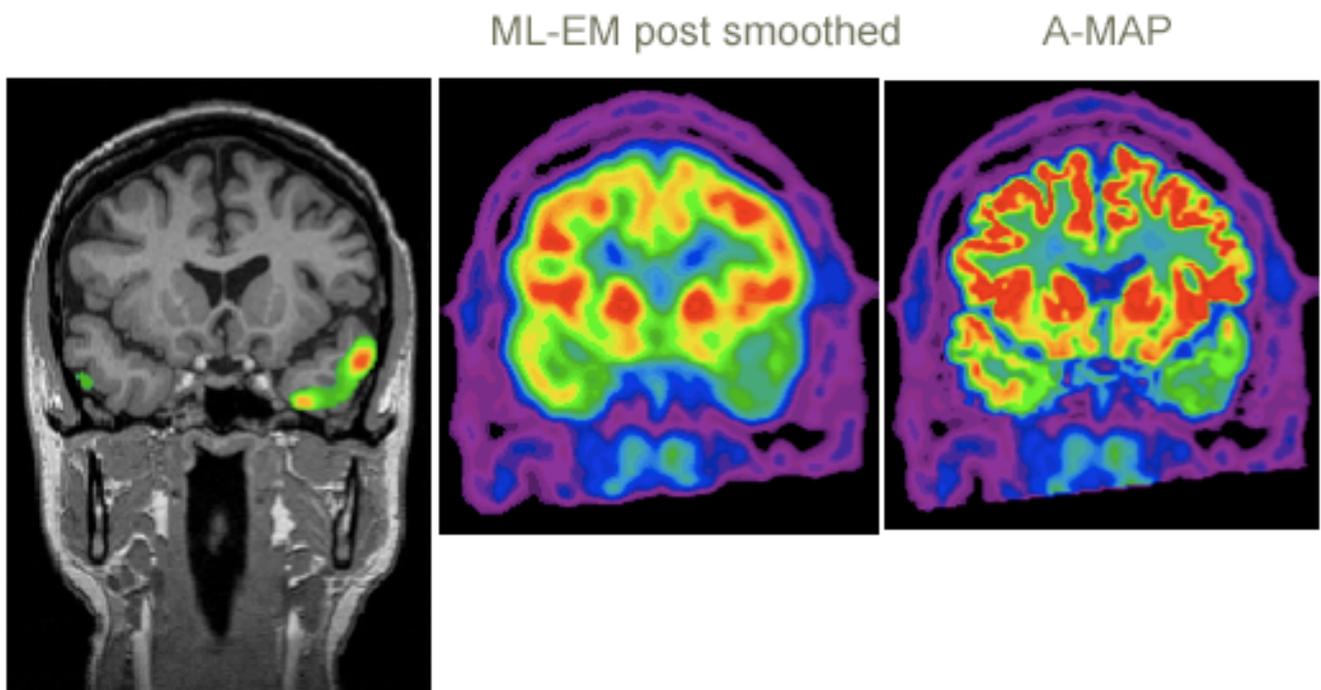
---

- Réduire la dimension du problème :
  - base de fonctions spatiales : blobs
  - fonctions de base temporelles ...
  
- Régularisation variationnelle :
  - solution non régularisée :  
minimisation de  $d(p, Rf)$
  
  - solution régularisée :  
minimisation de  $d_1(p, Rf) + \lambda d_2(f, f_{\text{a priori}})$
  
- Méthodes empiriques :
  - post-filtrage
  - arrêt précoce des itérations
  - filtrage entre les itérations
  - ...

# Exemple

---

- Introduire des a priori issus du scanner ou de l'IRM lors de la reconstruction des données



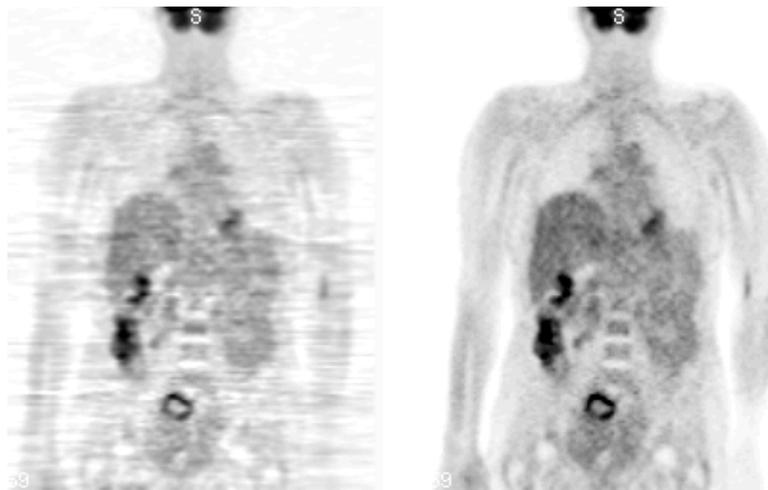
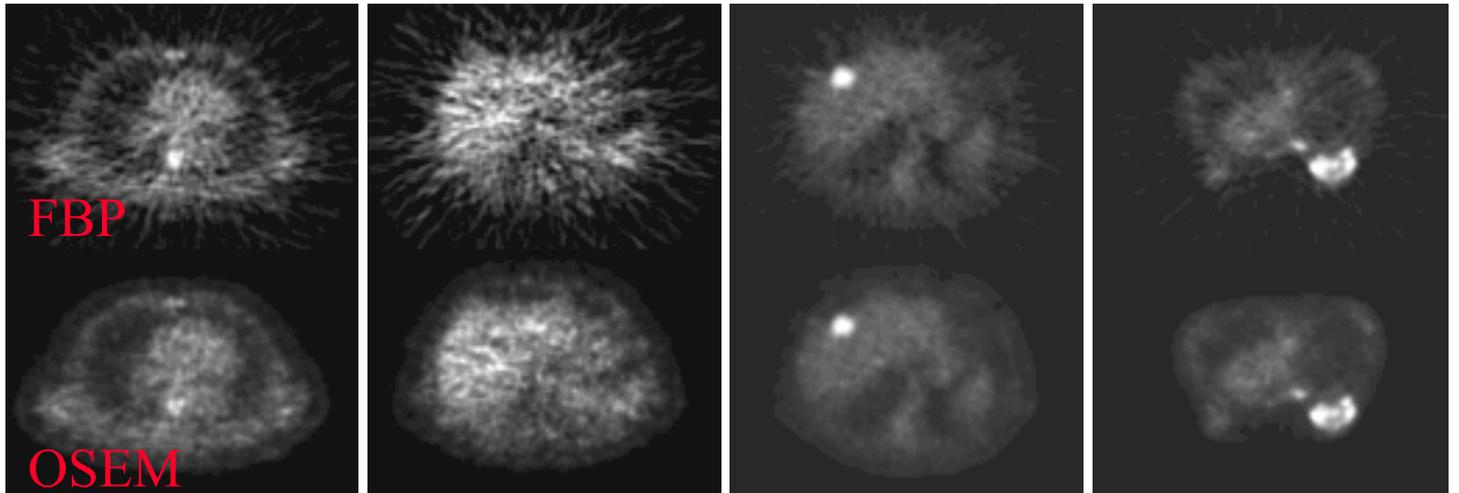
*Baete et al, IEEE Trans Med Imaging 2004*

Les méthodes de régularisation restent encore mal comprises, et peu utilisables en pratique

# Reconstruction analytique ou itérative ? (1)

---

## Tomographie d'émission PET



# Reconstruction analytique ou itérative ?

---

- Algorithmes itératifs par rapport à rétroprojection filtrée (FBP)



- \* réduction des artefacts de raies

- \* possible compensation des phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur)

- \* gestion simple de géométries complexes

- \* possible modélisation des caractéristiques statistiques des données

- \* possible introduction d'a priori



- \* temps de calculs accrus

- \* non linéaire

- \* beaucoup de paramètres à ajuster

- \* artefacts de raies remplacés par d'autres structures de bruit

# Reconstruction analytique ou itérative ?

---

- La tendance nous porte vers les méthodes itératives essentiellement du fait de :
  - \* la possibilité de compenser les phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur) (grande flexibilité) et de modéliser des géométries complexes
  - \* la puissance des calculateurs actuels

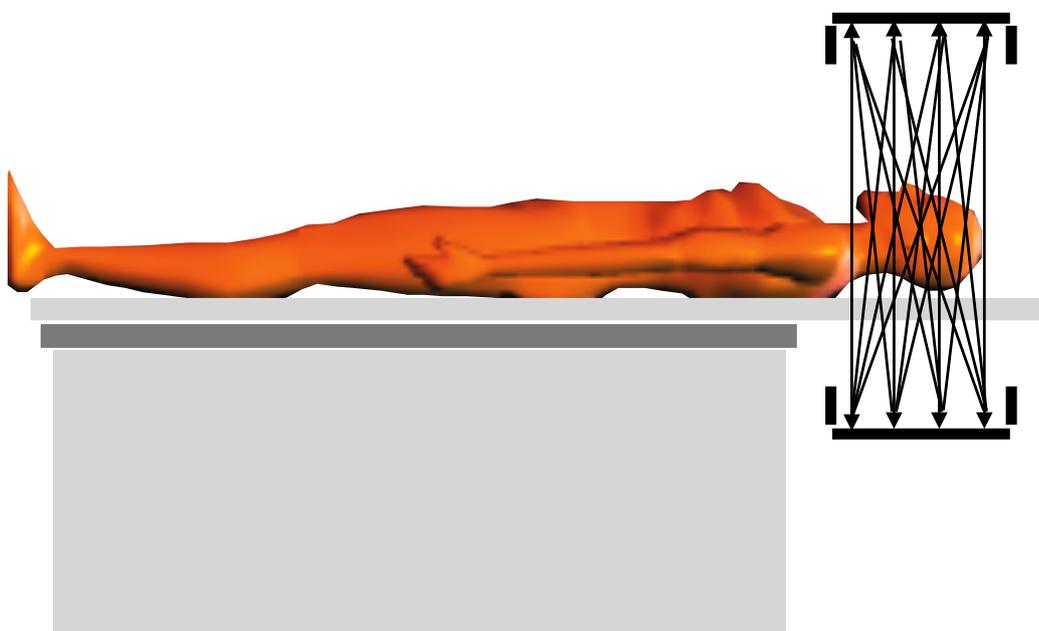
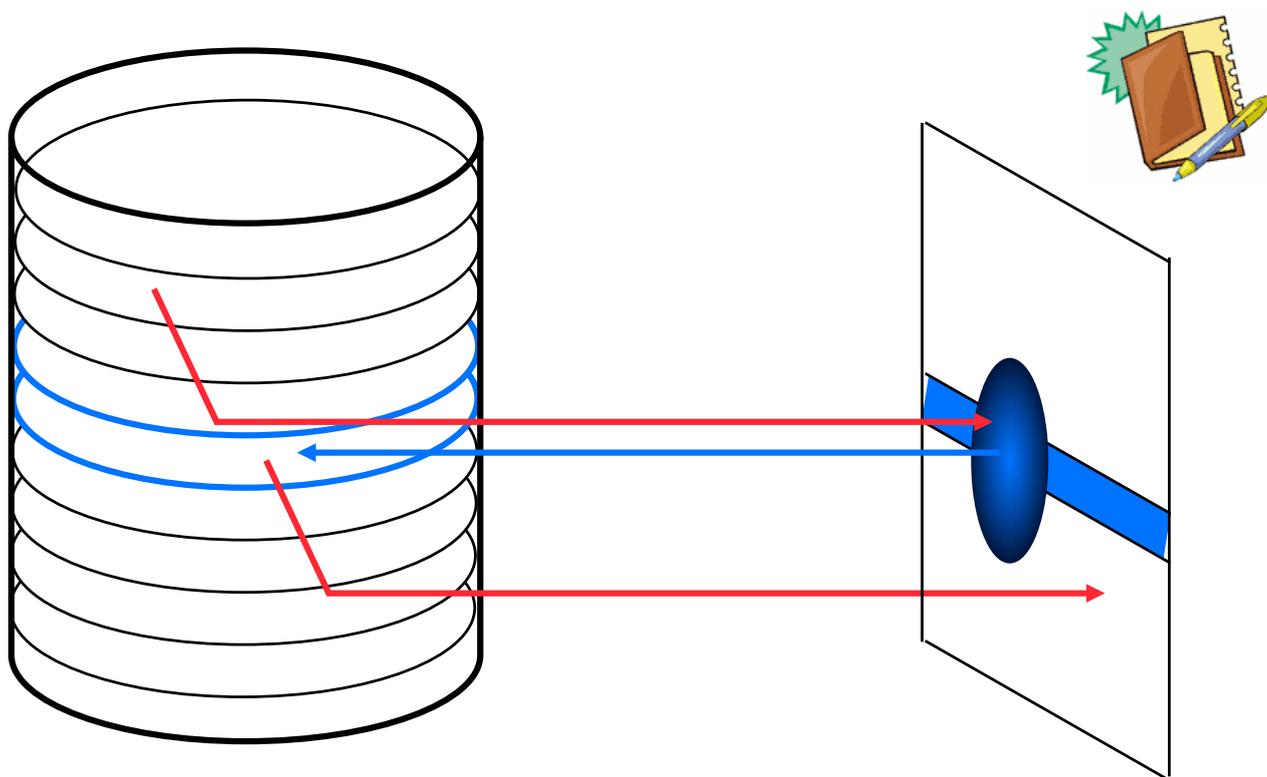


- \* améliorer la matrice système
- \* mieux comprendre la régularisation



## Au delà de la reconstruction 2D...

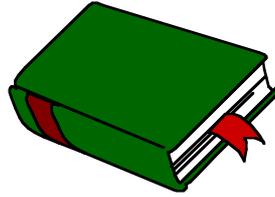
---



Solution : « fully 3D reconstruction »

# Historique

---



- 1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”
  - ⇒ travaux confinés au cercle des mathématiciens
- 1956 : Bracewell : démonstration des relations entre transformée de Fourier et transformée de Radon
- 1963 : premières applications de la tomographie médicale
  - Kuhl, prof de radiologie : premières images tomographiques par rétroprojection simple
  - Cormack, physicien : application des travaux de Radon aux acquisitions par rayons X
- 1970 : publication de la première image de tomodensitométrie X
- 1970-73 : mise au point du premier scanner X par Cormack et Hounsfield
- 1979 : Attribution du prix Nobel de Médecine à Cormack et Hounsfield

# Quelle méthode pour quelle application ?

---

- Scanner X
  - \* rétroprojection filtrée car excellent rapport signal-sur-bruit
  
- Tomographie d'émission monophotonique
  - \* routine clinique : longtemps rétroprojection filtrée seulement
  - \* de plus en plus fréquemment : algorithmes itératifs, en particulier OSEM, du fait de :
    - la réduction des artefacts de raies
    - les plus grandes possibilités en terme de quantification
    - le traitement plus efficace de données présentant une faible statistique (10 000 moins d'événements qu'en scanner X)
    - l'augmentation de la puissance des calculateurs qui rend la mise en œuvre d'algorithmes itératifs compatible avec une utilisation clinique
  
- Tomographie d'émission de positons
  - \* rétroprojection filtrée, OSEM, RAMLA

## Pour en savoir plus ...

---

### Articles courts

- Analytic and iterative reconstruction algorithms in SPECT. Journal of Nuclear Medicine 2002, 43:1343-1358
- J. Qi and R. Leahy, Iterative reconstruction techniques in emission tomography, Topical review, Phys. Med. Biol. , vol. 51 (2006), R541-R578
- Rétroprojection filtrée et reconstruction itérative : rappels théoriques et propriétés des deux approches sur :  
<http://www.guillemet.org/irene>
- Articles didactiques téléchargeables sur:  
<http://www.guillemet.org/irene/equipe4/cours.html>

### Ouvrage

- Kinahan PE, Defrise M, and Clackdoyle R. Analytic image reconstruction methods. In: Emission Academic Press, 2004
- La tomographie, Pierre Grangeat editeur, IC2

# Annexes

---

# Contrôle des connaissances

---

On réalise une acquisition SPECT de perfusion myocardique en utilisant 64 projections, chaque projection ayant 128 lignes et 256 colonnes (dans la direction axiale).

1. Quelle est la taille du sinogramme (nombre de lignes et nombre de colonnes) nécessaire à la reconstruction d'une coupe de dimensions 128 x 128 ?
2. Quelle est la taille de l'opérateur de projection impliqué dans une reconstruction tomographique 2D ?
3. On reconstruit une coupe avec l'algorithme MLEM et 200 itérations en 2 secondes. Quelle est la durée nécessaire à la reconstruction de toutes les coupes, en arrivant au même point de convergence, en utilisant l'algorithme OSEM et 4 sous-ensembles ?

# Contrôle des connaissances

---

On réalise une acquisition SPECT de perfusion myocardique en utilisant 64 projections, chaque projection ayant 128 lignes et 256 colonnes (dans la direction axiale).

1. Quelle est la taille du sinogramme (nombre de lignes et nombre de colonnes) nécessaire à la reconstruction d'une coupe de dimensions 128 x 128 ?

64 lignes et 128 colonnes

2. Quelle est la taille de l'opérateur de projection impliqué dans une reconstruction tomographique 2D ?

64x128 lignes et 128x128 colonnes

3. On reconstruit une coupe avec l'algorithme MLEM et 200 itérations en 2 secondes. Quelle est la durée nécessaire à la reconstruction de toutes les coupes, en arrivant au même point de convergence, en utilisant l'algorithme OSEM et 4 sous-ensembles ?

256 coupes

$2/4=0,5$  s par coupe

128 secondes pour reconstruire ttes les coupes

## Contrôle des connaissances

---

On réalise une acquisition SPECT comportant 64 projections 128 x 128.

- 1) Combien de coupes transaxiales peut-on reconstruire sans interpolation ?
- 2) Combien de sinogrammes peut-on former à partir de cet examen ?
- 3) Quelles sont les dimensions (nombre de lignes, nombre de colonnes) d'un sinogramme ?
- 4) On reconstruit d'abord les images par rétroprojection filtrée, en utilisant un filtre de Hann, de fréquence de coupure  $0,5 \text{ pixel}^{-1}$ . Les images résultantes apparaissent trop bruitées. Que doit-on faire ?
- 5) On reconstruit ensuite les images par la méthode MLEM avec 20 itérations. Les images sont floues, et manquent de détails. Que doit-on faire ?
- 6) On reconstruit les images par la méthode OSEM, avec 4 sous ensembles et 8 itérations. Les images seront-elles plus ou moins bruitées que les images reconstruites par l'approche MLEM avec 20 itérations ?
- 7) La reconstruction MLEM avec 20 itérations dure 20 s. Quelle est la durée de la reconstruction avec OSEM, 4 sous-ensembles et 8 itérations ?

## Contrôle des connaissances

---

On réalise une acquisition SPECT comportant 64 projections  $128 \times 128$ .

- 1) Combien de coupes transaxiales peut-on reconstruire sans interpolation ? **128**
- 2) Combien de sinogrammes peut-on former à partir de cet examen ? **128**
- 3) Quelles sont les dimensions (nombre de lignes, nombre de colonnes) d'un sinogramme ?  
**128 colonnes et 64 lignes**
- 4) On reconstruit d'abord les images par rétroprojection filtrée, en utilisant un filtre de Hann, de fréquence de coupure  $0,5 \text{ pixel}^{-1}$ . Les images résultantes apparaissent trop bruitées. Que doit-on faire ?  
**Diminuer la fréquence de coupure du filtre**
- 6) On reconstruit ensuite les images par la méthode MLEM avec 20 itérations. Les images sont floues, et manquent de détails. Que doit-on faire ?  
**Augmenter le nombre d'itérations**

## Contrôle des connaissances

---

- 6) On reconstruit les images par la méthode OSEM, avec 4 sous ensembles et 8 itérations. Les images seront-elles plus ou moins bruitées que les images reconstruites par l'approche MLEM avec 20 itérations ?

plus bruitées, car OSEM 4 ss-ens et 8 itér correspond à 32 itérations MLEM

- 7) La reconstruction MLEM avec 20 itérations dure 20 s. Quelle est la durée de la reconstruction avec OSEM, 4 sous-ensembles et 8 itérations ?

1 itération MLEM dure 1 seconde

OSEM 4 ss-ensembles et 8 itérations correspond à 32 itérations MLEM. La reconstruction durera 32 s.

# Annexes

---

# Implantations possibles du filtrage en FBP ...

---

- Multiplication du filtre rampe par une fenêtre d'apodisation

$$|\rho| \longrightarrow |\rho|w(\rho)$$

➡ filtrage 1D de la TF 1D des sinogrammes

- Filtrage des projections dans l'espace réel puis reconstruction avec un filtre rampe

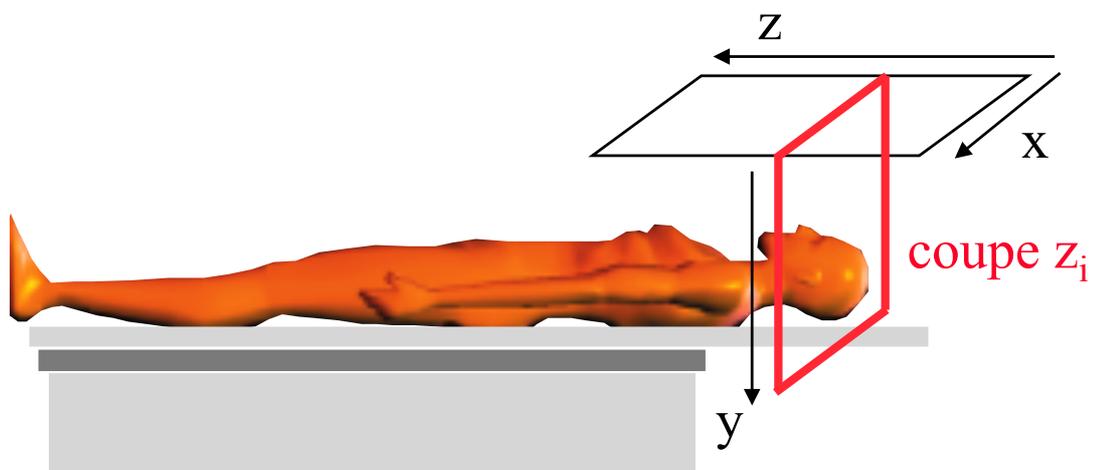
➡ filtrage 2D (directions x,z)

- Reconstruction des sinogrammes avec un filtre rampe puis filtrage 2D des coupes reconstruites

➡ filtrage 2D (directions x,y)

- Reconstruction avec un filtre rampe puis filtrage 3D du volume reconstruit

➡ filtrage 3D (directions x,y,z)



# Trois approches de reconstruction 3D complète

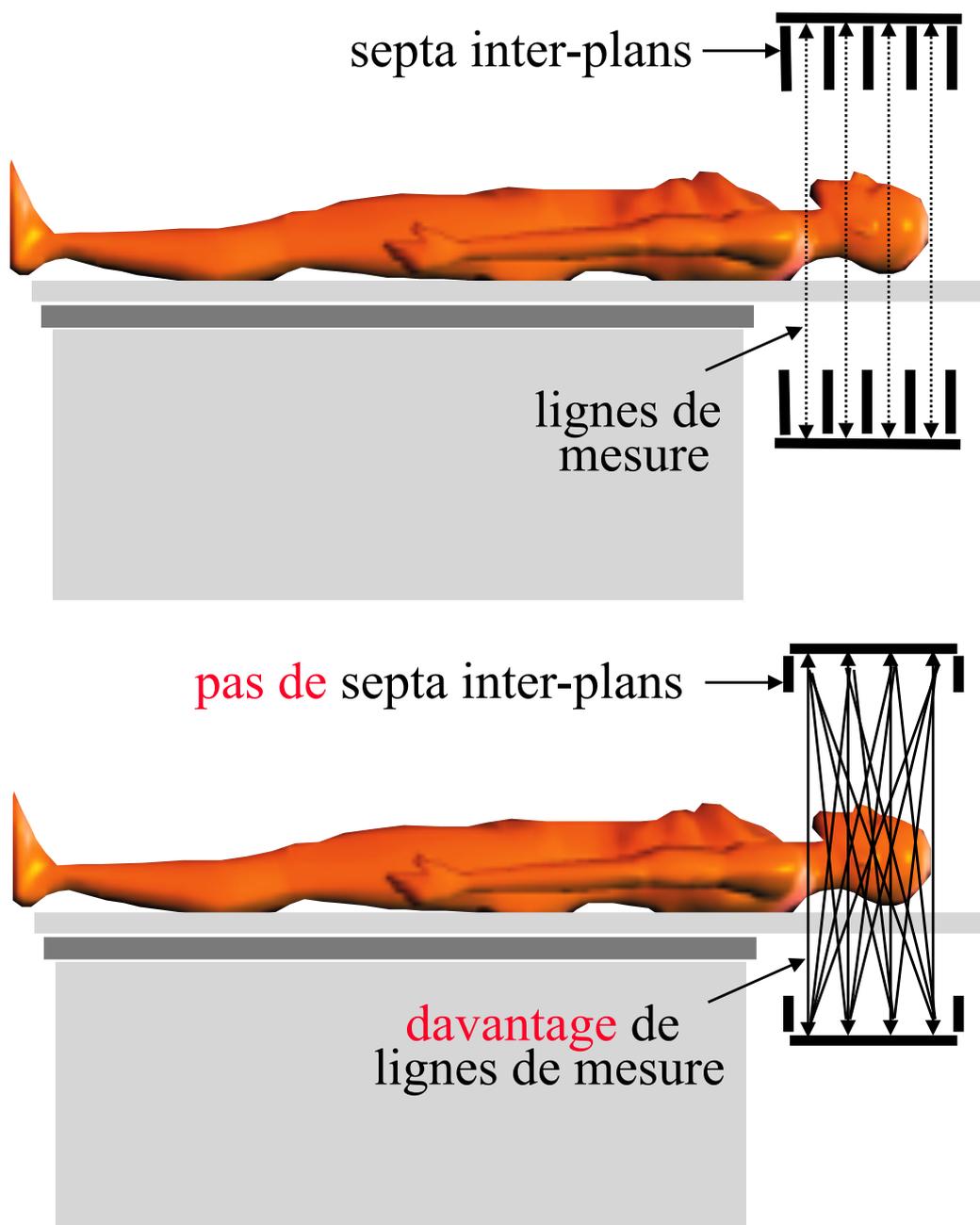
---



- Méthode analytique  
3D FBP : généralisation de la rétroprojection  
filtrée au 3D
  
- Méthodes de rebinning  
réorganisation des données pour se ramener à  
la configuration de reconstruction 2D
  
- Méthodes discrètes itératives  
estimation d'un projecteur 3D

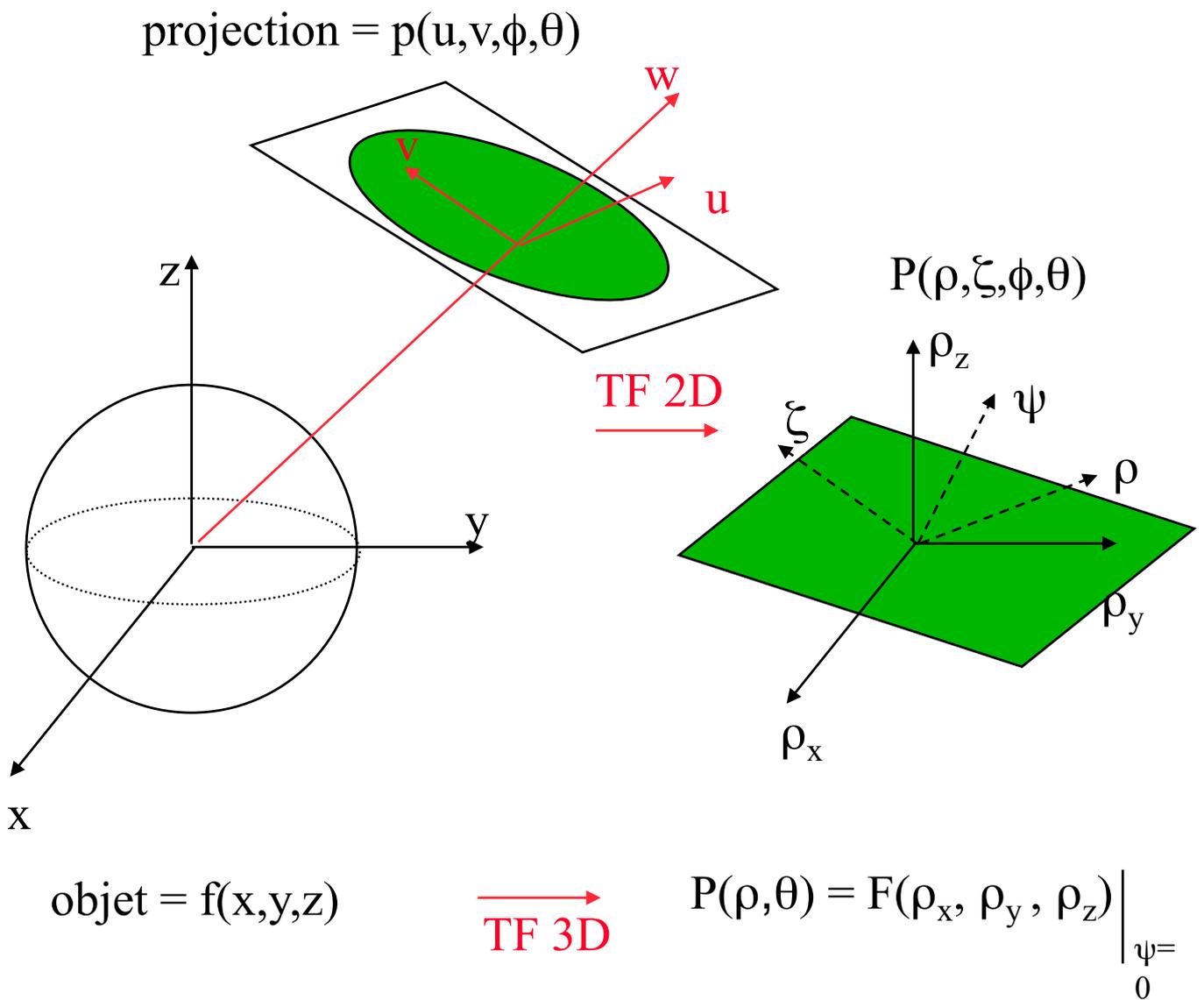
# Méthodes analytiques de reconstruction 3D

- 3D FBP : généralisation de la rétroprojection filtrée au 3D :
  - prend en compte la redondance des données



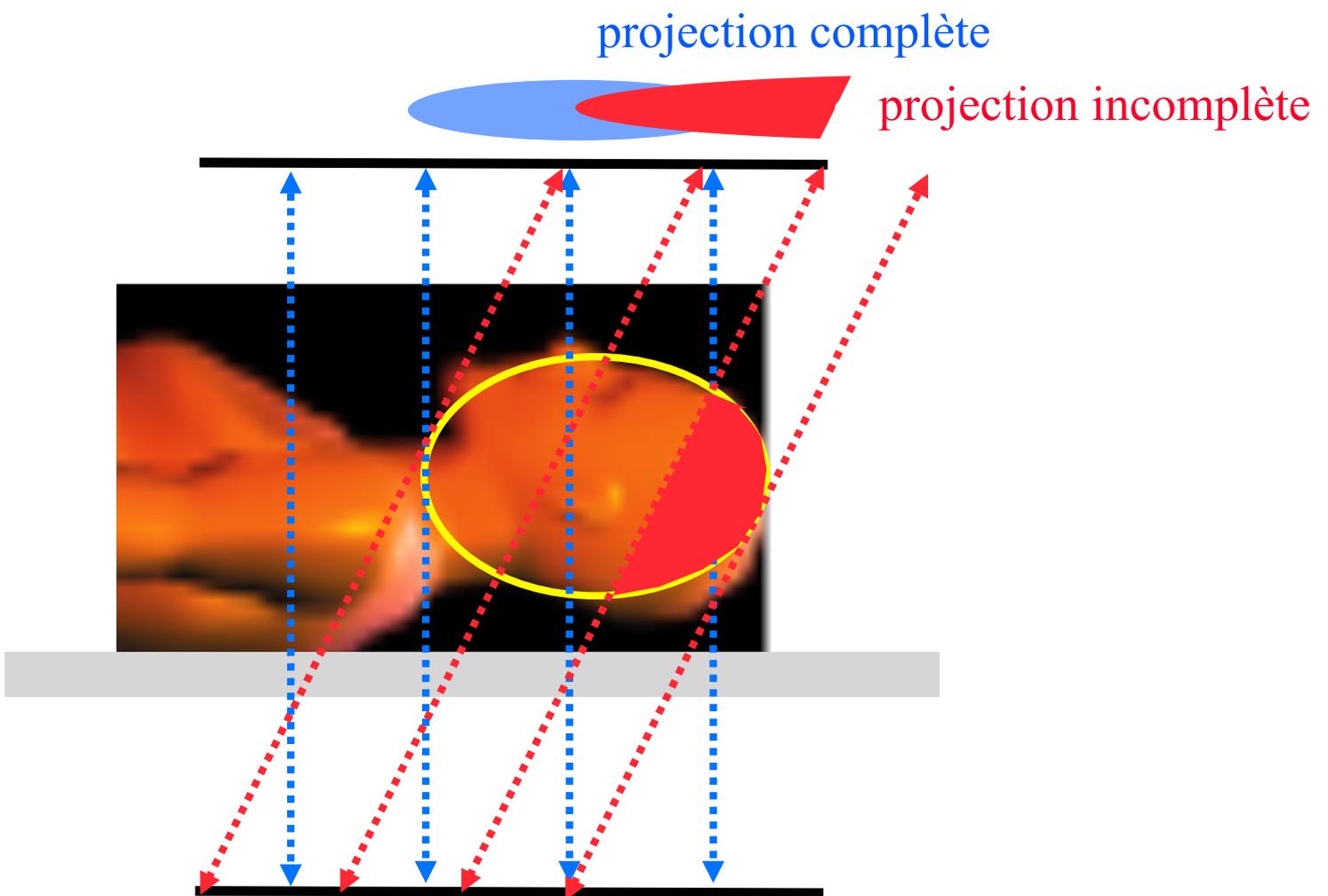
# Théorème de la coupe centrale en 3D

Similaire à la version 2D



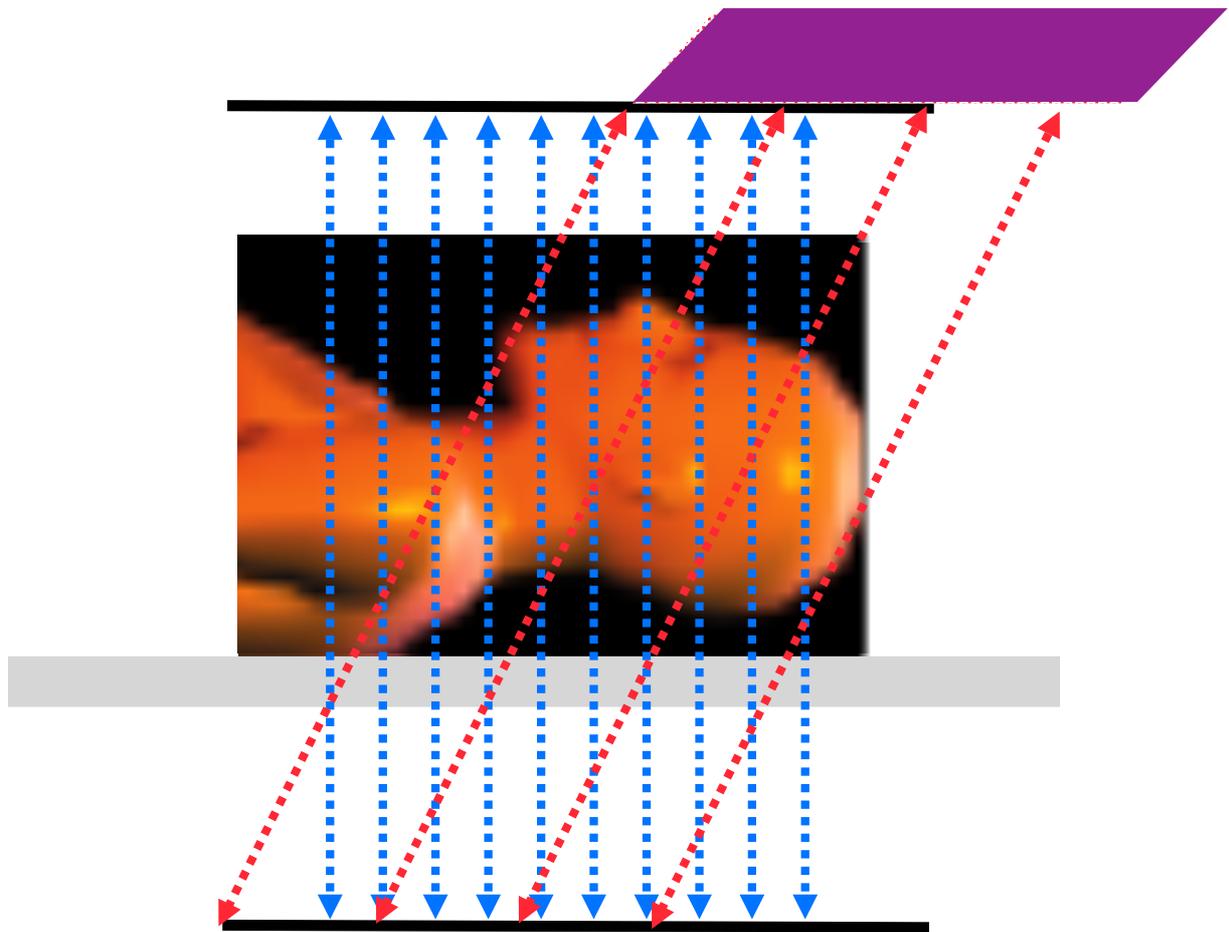
... mais 3D FBP requiert des données complètes

---



# Reprojection 3D traitant des données incomplètes

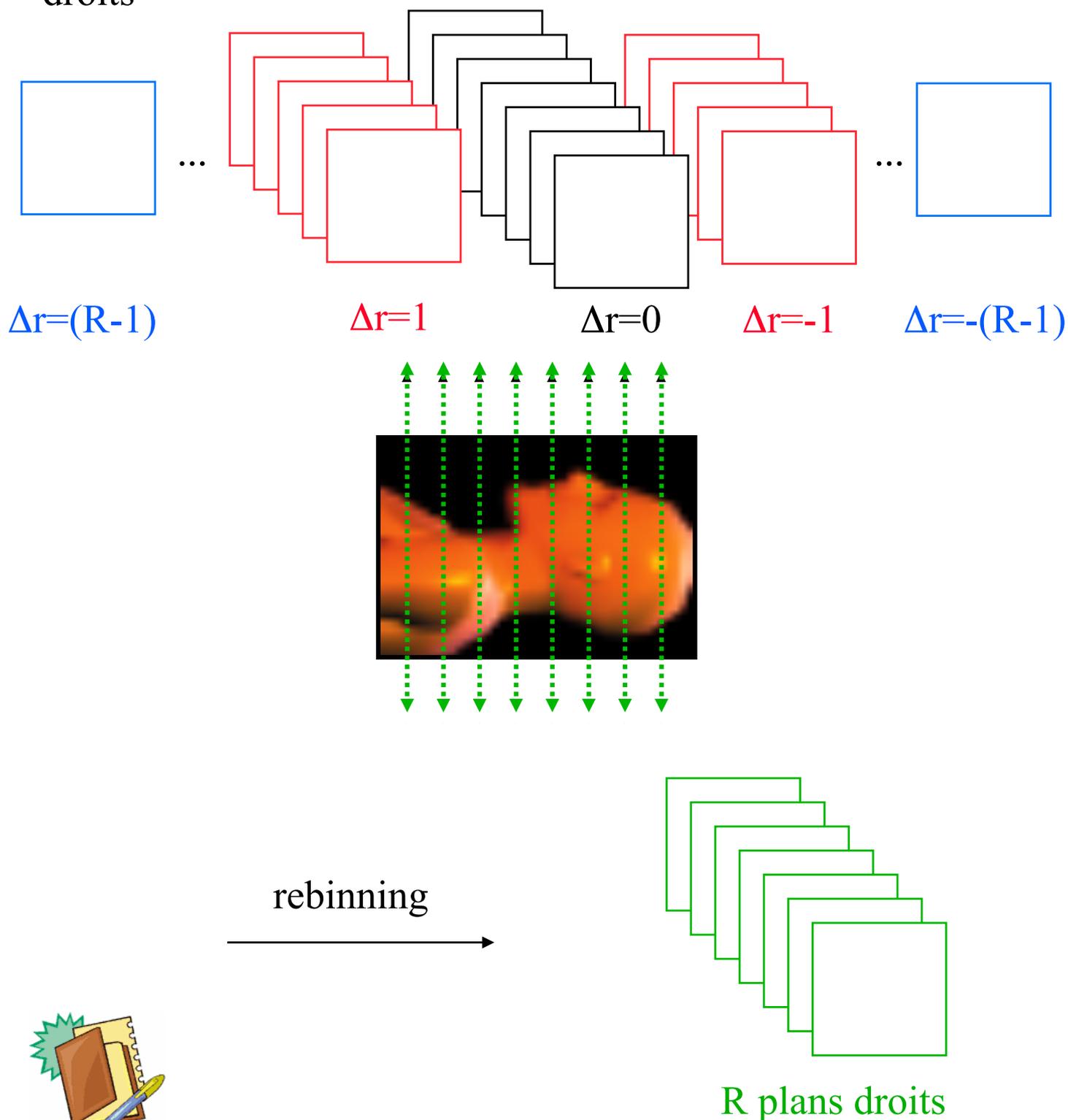
---



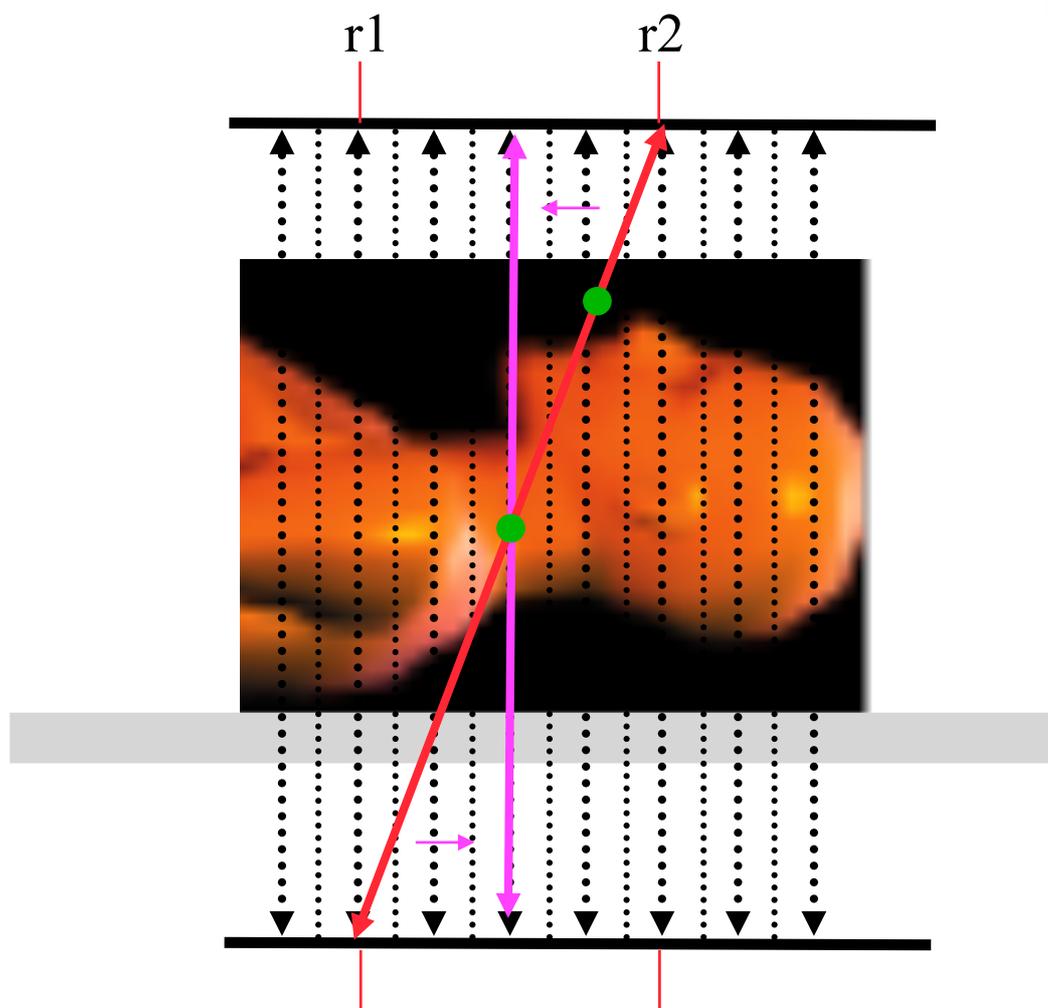
- Extraction des données 2D (non prise en compte des LOR obliques)
- Reconstruction d'une première estimée de l'objet par FBP 2D
- Estimation des données tronquées en reprojétant l'objet estimé
- Fusion des données estimées et des données mesurées
- Reconstruction par 3D FBP

# Méthodes de rebinning

- A partir des  $R^2$  sinogrammes ( $R$  nombre de couronnes), estimation de  $2R-1$  sinogrammes correspondant aux plans droits



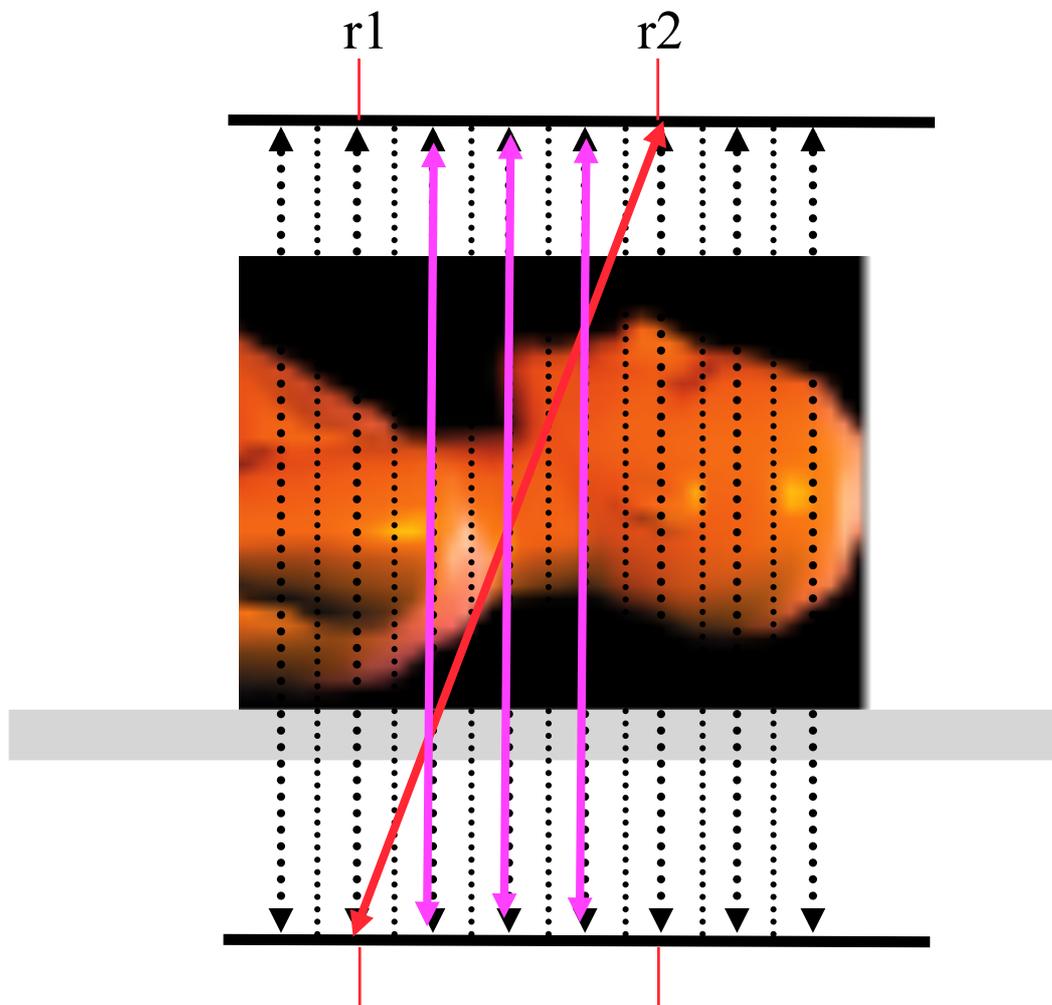
# Single slice rebinning



$$r_{\text{rebin}} = (r1+r2)/2$$

# Multi slice rebinning

---



## FOurier REbinning (1995)



Les sinogrammes obliques sont rééchantillonnés dans l'espace de Fourier 2D des sinogrammes

Tous les événements détectés sur les lignes de réponse obliques sont affectés à des sinogrammes droits.

### Après rebinning

On effectue une reconstruction 2D coupe par coupe classique

# Méthodes discrètes itératives

---

- Aucune différence conceptuelle avec l'approche 2D

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{f} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \text{projections} & & \text{objet à} \\ \text{acquises} & \text{opérateur} & \text{reconstruire} \\ & \text{de projection} & \end{array}$$

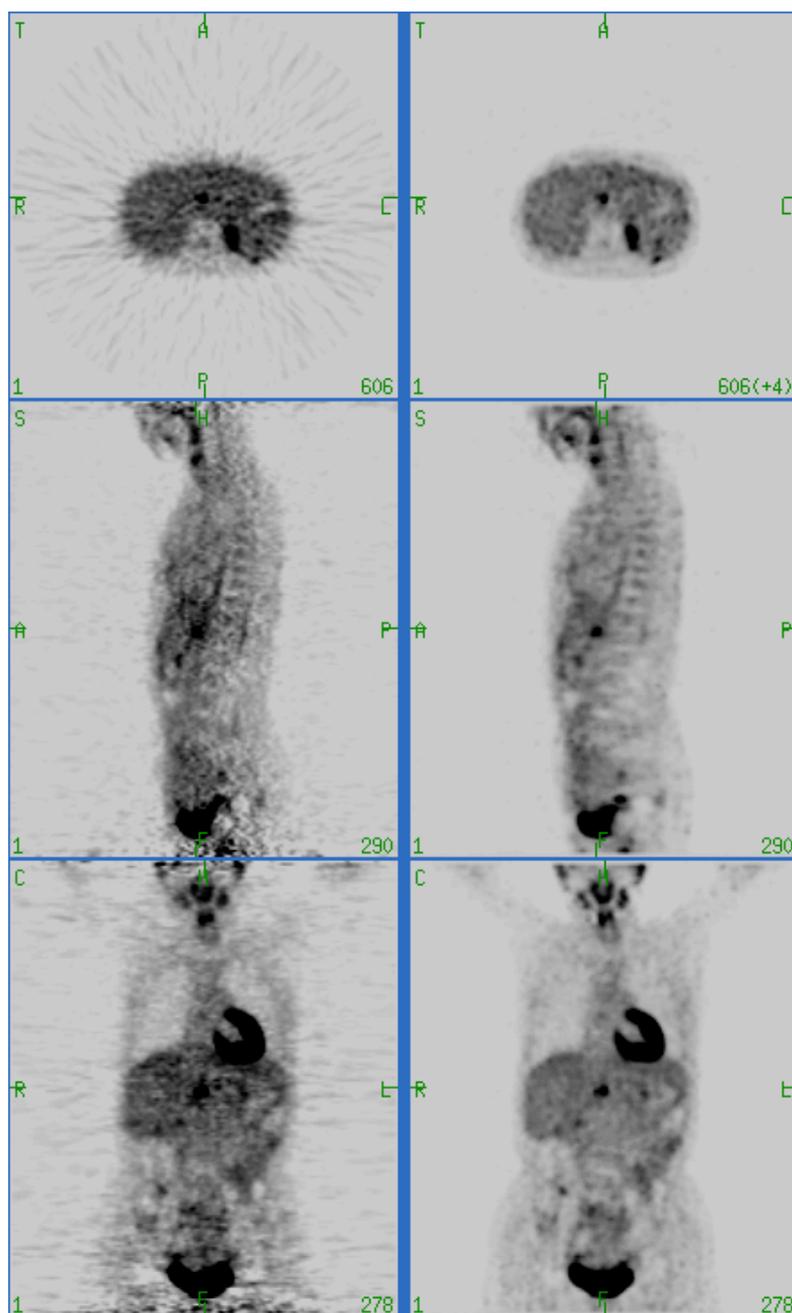
- Challenges :

- taille du projecteur (ou matrice de transition) (plus de 10 millions de LOR en PET 3D)
- estimation du projecteur pour rendre compte correctement des phénomènes 3D affectant les données mesurées (diffusion, réponse du détecteur, sensibilité variable du détecteur dans la direction axiale).

# Intérêt de l'approche « fully 3D »

---

## FORE-FBP    3D Ramla



*Joel Karp, University of Pennsylvania*