

## Reconstruction tomographique

Irène Buvat  
IMNC CNRS 8165  
Orsay

[buvat@imnc.in2p3.fr](mailto:buvat@imnc.in2p3.fr)  
<http://www.guillemet.org/irene>

Octobre 2011

# Plan

---

- Introduction
  - La tomographie
  - Tomographie en transmission
  - Tomographie en émission
  - Spécificité du problème de reconstruction tomographique
- Notions de base
  - Projection
  - Transformée de Radon
  - Sinogramme
- Méthodes de reconstruction analytique
  - Principe
  - Théorème de la coupe centrale
  - Rétroprojection filtrée
  - Filtres
- Méthodes de reconstruction itérative
  - Principe et méthodes
  - Opérateur de projection R
  - Méthodes, MLEM, OSEM, RAMLA
  - Régularisation
- Reconstruction « fully 3D »
  - Principe
  - Méthodes de rebinning

# Avertissement

---

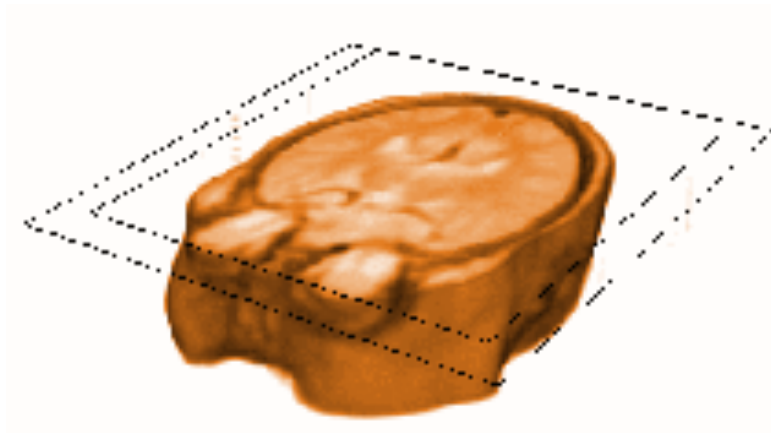


# Introduction : la tomographie

---



- Tomos : coupe, section (grec)
- Graphia : écrire
- Cartographie d'un paramètre interne à un objet, selon un ou plusieurs plans de coupes, à partir de mesures externes et de calculs

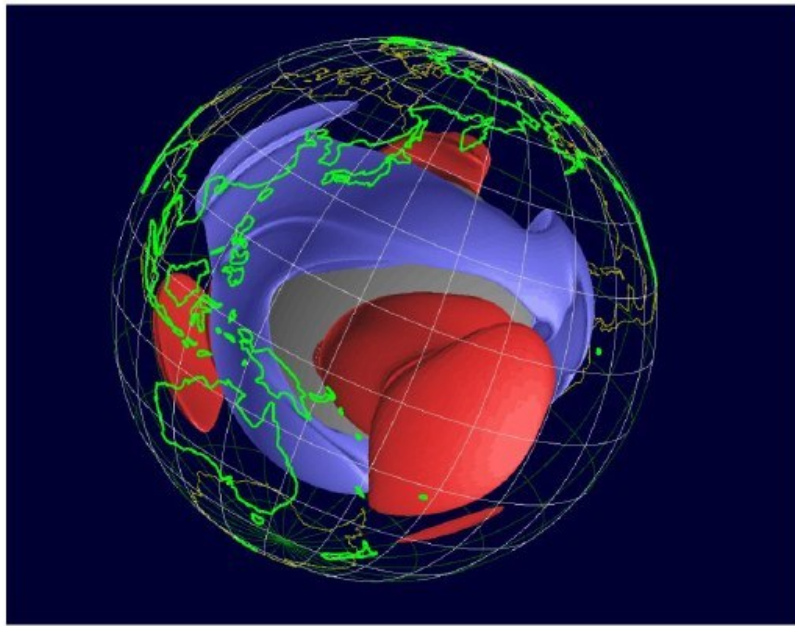


# Introduction : la tomographie

---



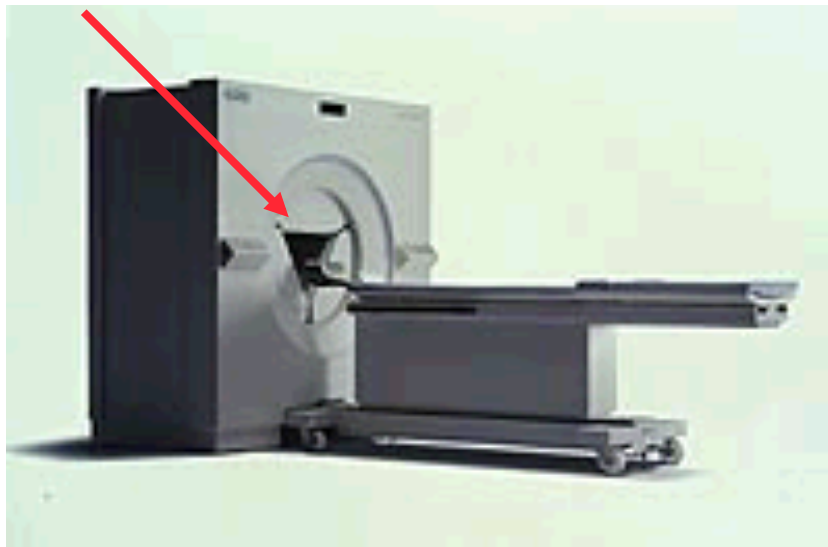
- Un moyen de sonder la matière, qui a de multiples domaines d'applications, e.g. :
  - contrôle non destructif,
  - géophysique (sondage des océans, des couches géologiques)
  - astrophysique,
  - imagerie médicale



# La tomographie médicale

---

- Mesure de rayonnement émis ou transmis par des tomodensitomètres, gamma caméras ou tomographes à émission de positons



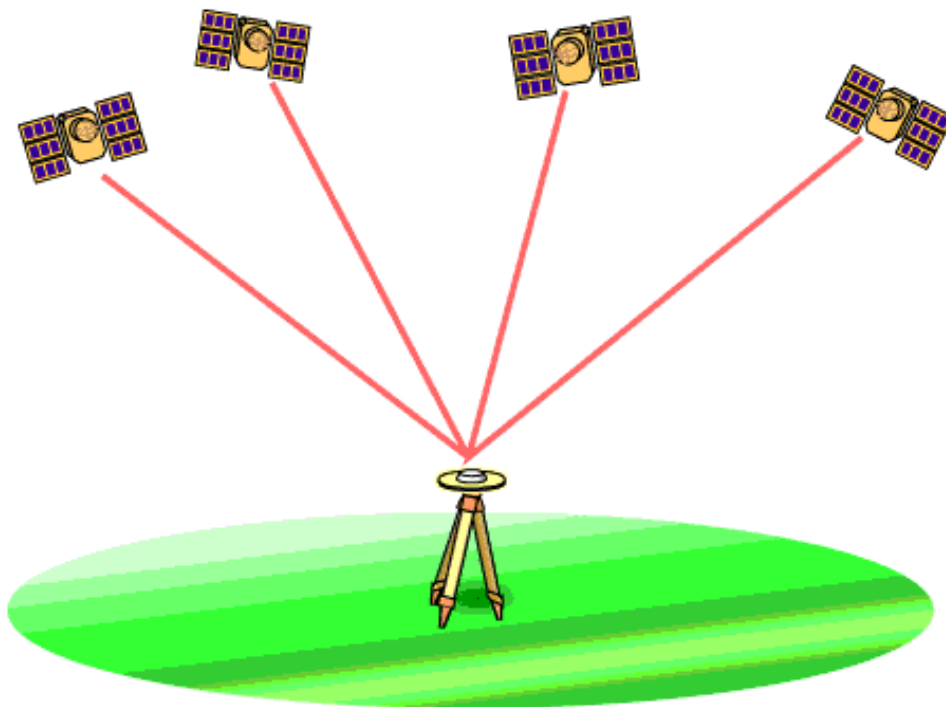
- Traitement de l'information détectée



# Le point clef

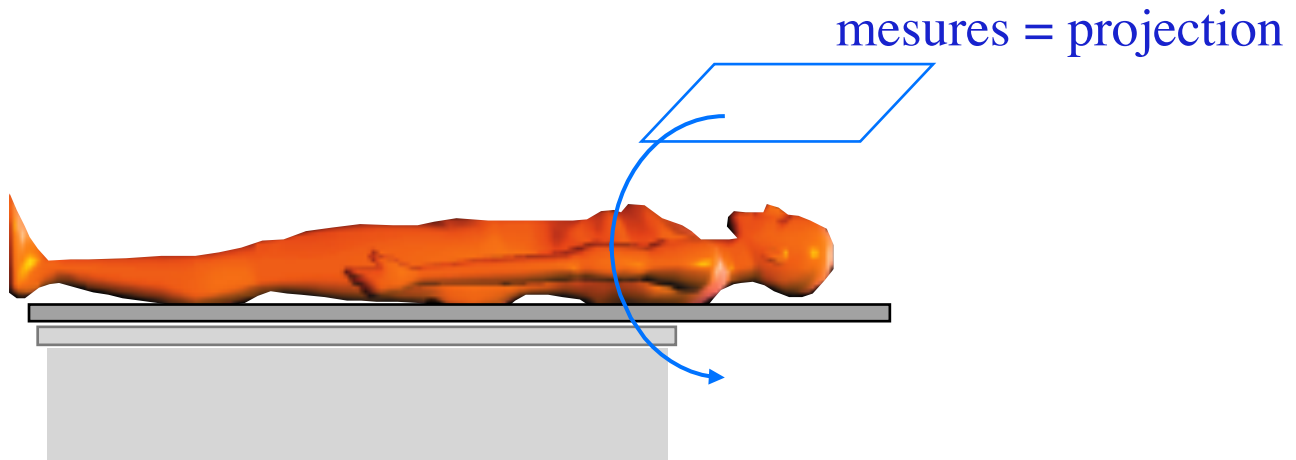
---

- Mesures sous différentes incidences angulaires



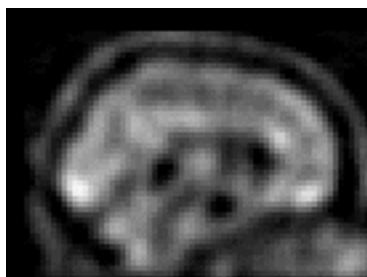
# En imagerie médicale

---

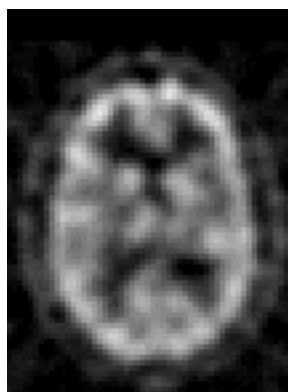


Mesures intégrales sous différentes incidences angulaires  
projections

Traitement de l'information détectée



sagittale



transverse



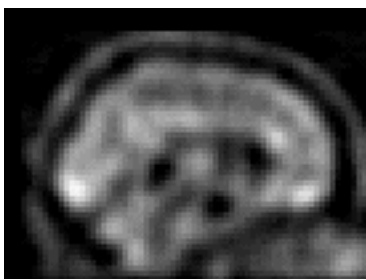
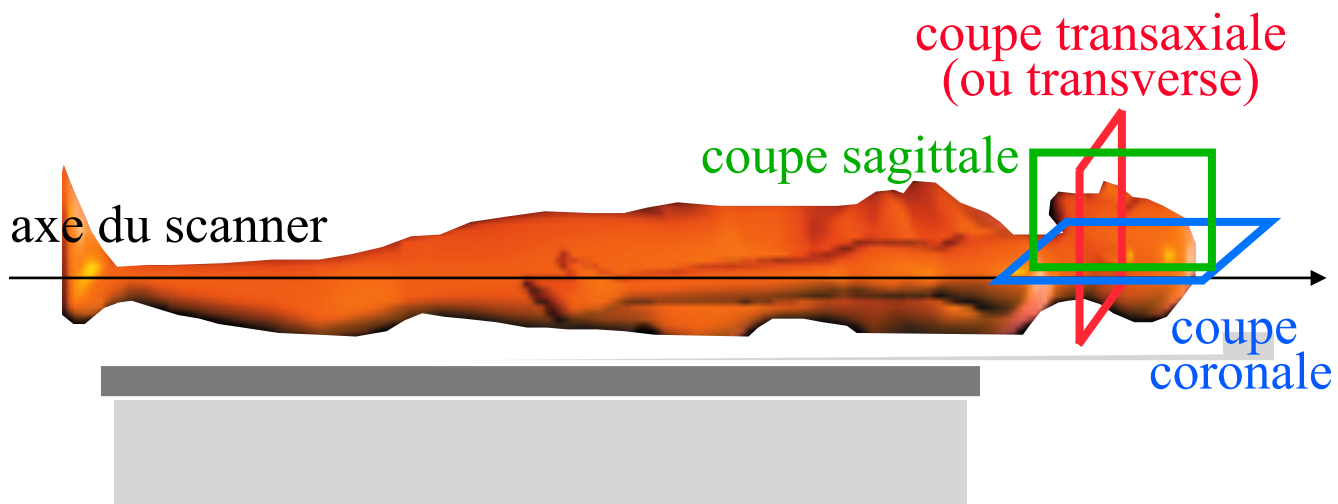
coronale

coupes d'orientation quelconque :  
imagerie 3D

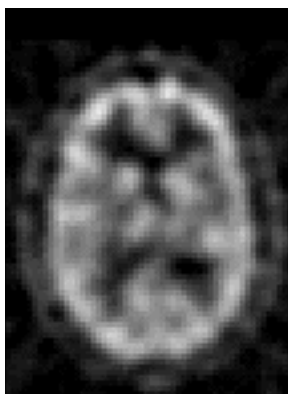


# Coupes tomographiques

---



sagittale



transverse

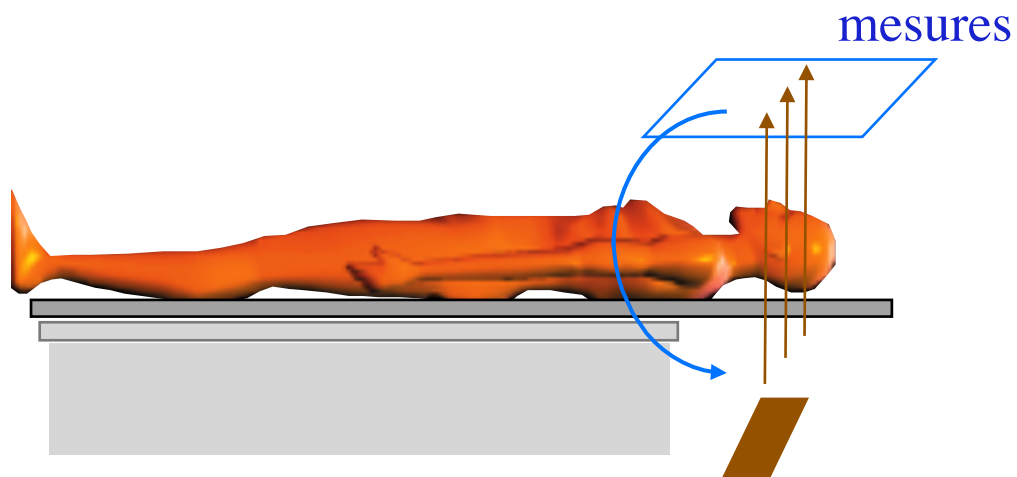


coronale

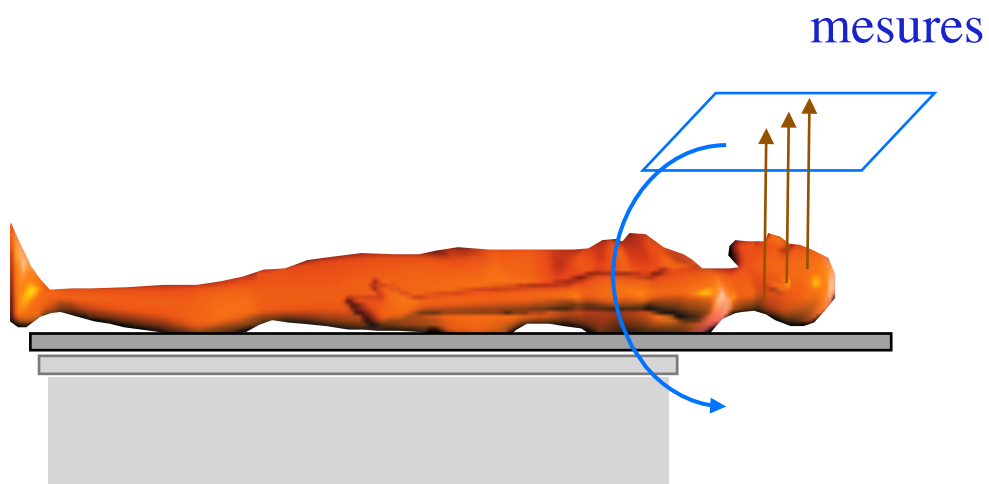
# Deux types de mesure en imagerie médicale

---

- Tomographie de transmission



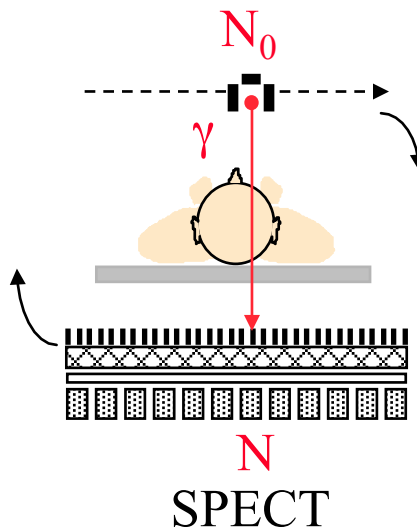
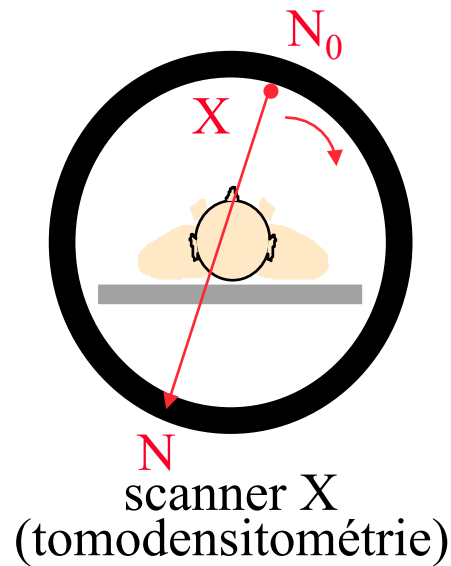
- Tomographie d'émission



# Tomographie de transmission : dispositifs

---

- Source (X ou  $\gamma$ ) externe au patient



Donne des informations sur l'atténuation induite par les tissus, donc sur la densité des tissus

# Tomographie de transmission : mesures

---

- Projection du rayonnement ayant traversé le patient



- Donne des informations sur la nature des tissus traversés

Si signal recueilli  $\sim$  signal source :

$\Rightarrow$  quasiment pas d'atténuation : poumons ?

Si signal recueilli  $\lll$  signal source :

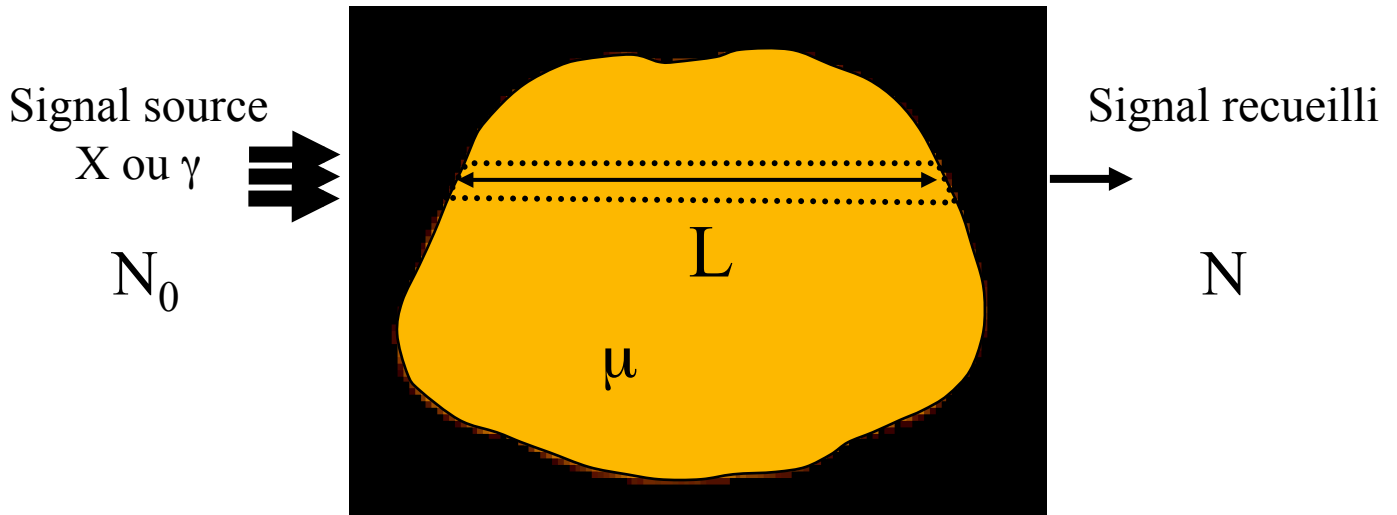
$\Rightarrow$  beaucoup d'atténuation : os ?

**Comment remonter à une information précise ?**

# Modélisation des mesures

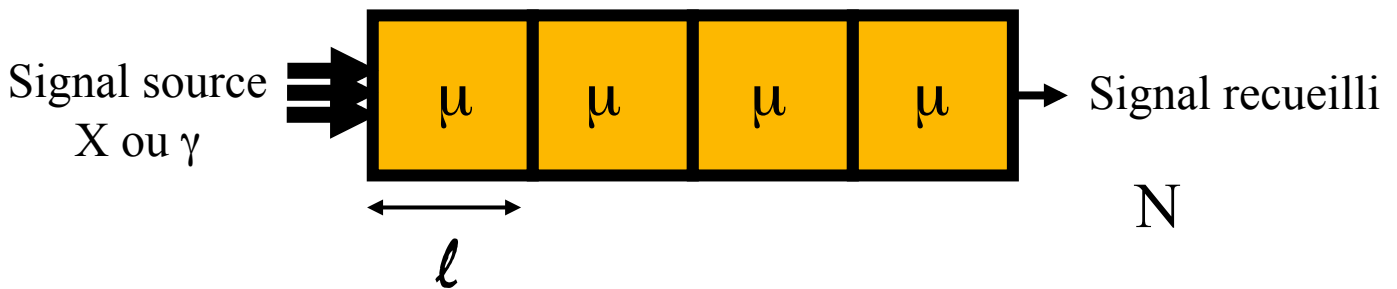
---

- Atténuation d'une source  $\gamma$  ou  $X$  dans un milieu homogène de coefficient d'atténuation  $\mu$  (en  $\text{cm}^{-1}$ )



$$N = N_0 \exp(-\mu L)$$

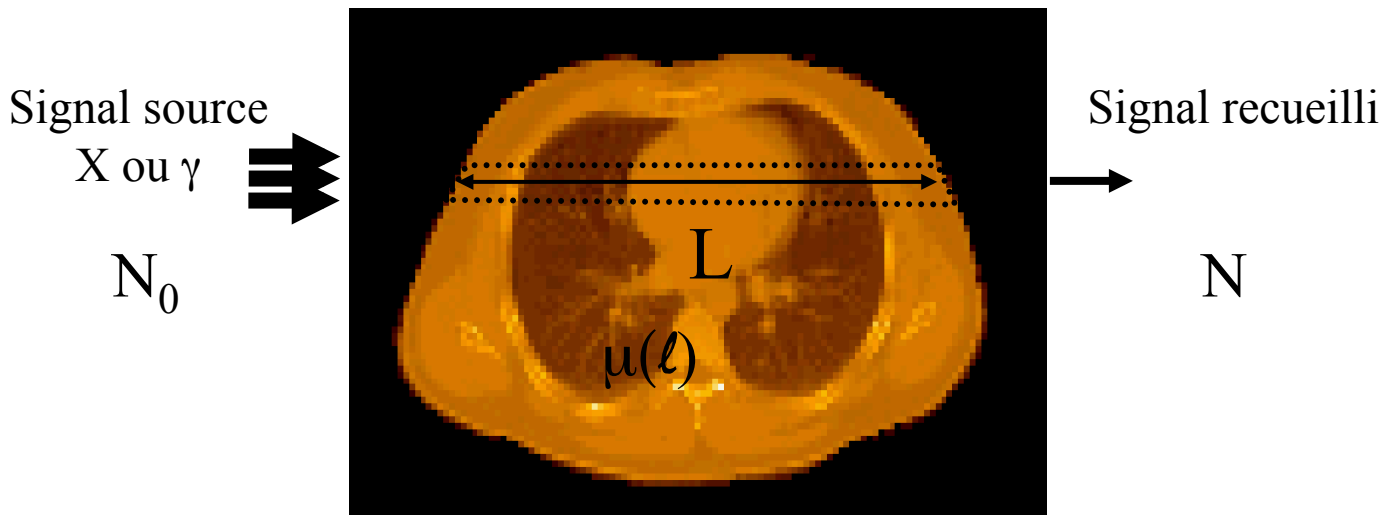
- Formulation discrète :



$$\begin{aligned} N &= N_0 \exp(-\mu \ell) \exp(-\mu \ell) \exp(-\mu \ell) \exp(-\mu \ell) \\ &= N_0 \exp(-\mu \ell - \mu \ell - \mu \ell - \mu \ell) = N_0 \exp(-4 \mu \ell) \end{aligned}$$

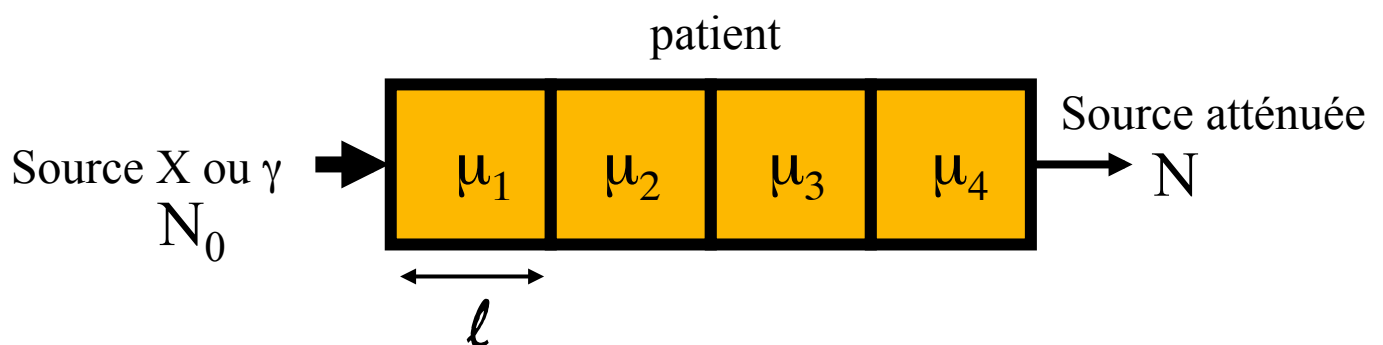
# Modélisation des mesures

- Atténuation d'une source  $\gamma$  ou X dans un milieu de densité inhomogène



$$N = N_0 \exp\left(-\int_0^L \mu(l) dl\right)$$

- Formulation discrète



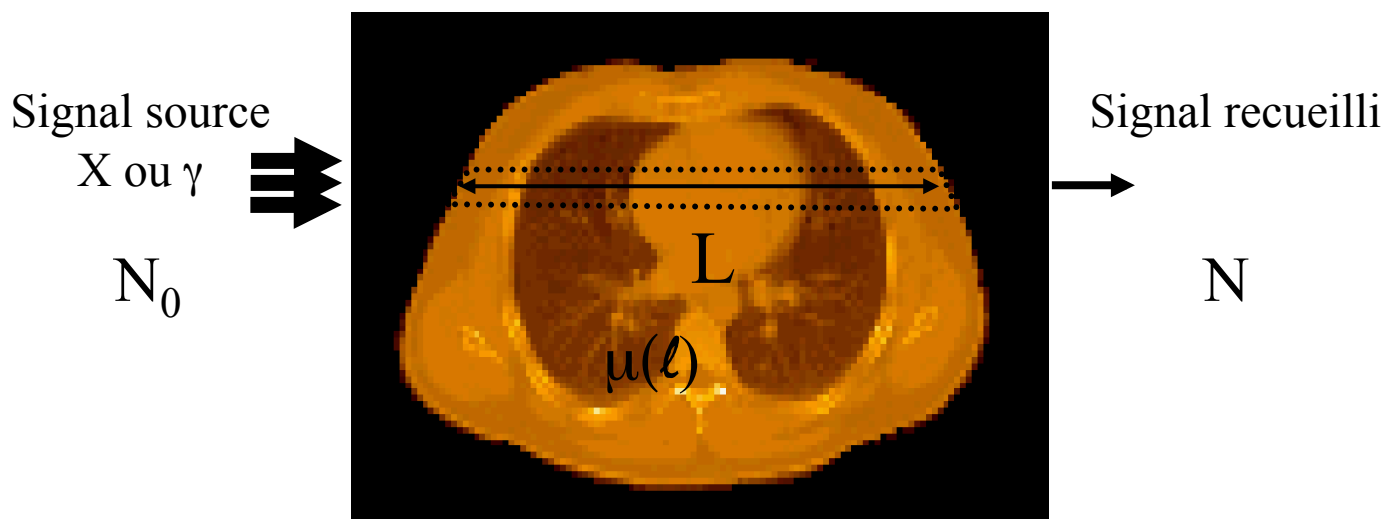
$$N = N_0 \exp[-\mu_1 l - \mu_2 l - \mu_3 l - \mu_4 l]$$

$$= N_0 \exp[-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) l]$$

## Problème à résoudre

---

- Trouver  $\mu(\ell)$ , qui représente la cartographie du coefficient d'atténuation dans le milieu



$$N = N_0 \exp\left(-\int_0^L \mu(\ell) d\ell\right)$$

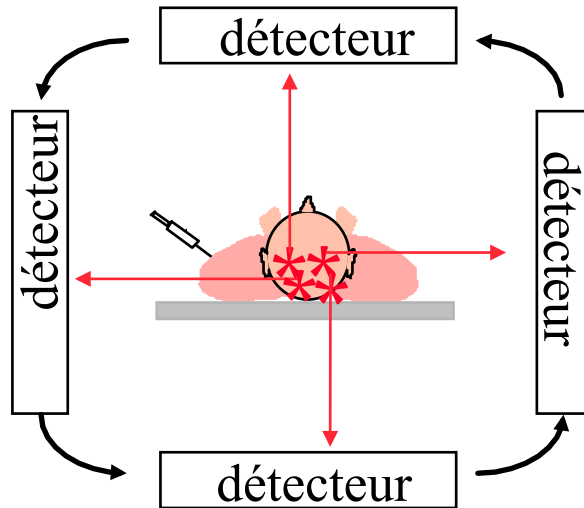
$$\ln \frac{N_0}{N} = \int_0^L \mu(\ell) d\ell$$

... à partir des mesures intégrales  
(i.e. des sommes mesurées)

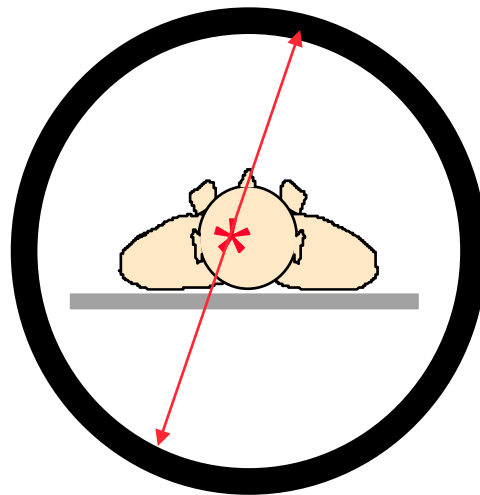
# Tomographie d'émission : dispositifs

---

- Source  $\gamma$  ou  $\beta^+$  interne au patient



SPECT



PET

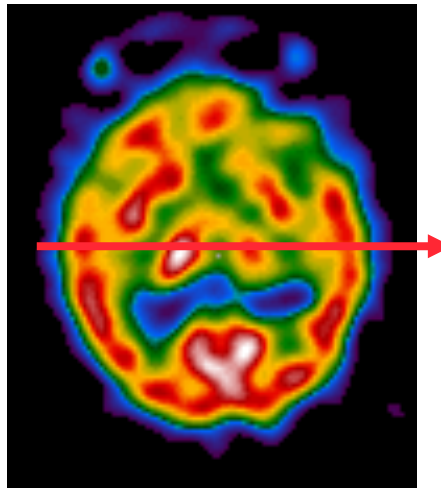
Donne des informations sur la localisation de la source dans l'organisme



# Tomographie d'émission : mesures

---

- Idéalement (sans atténuation) : somme (intégrale) de l'activité le long des raies de projections



1	1	1	→ 3
1	3	1	→ 5
1	1	1	→ 3

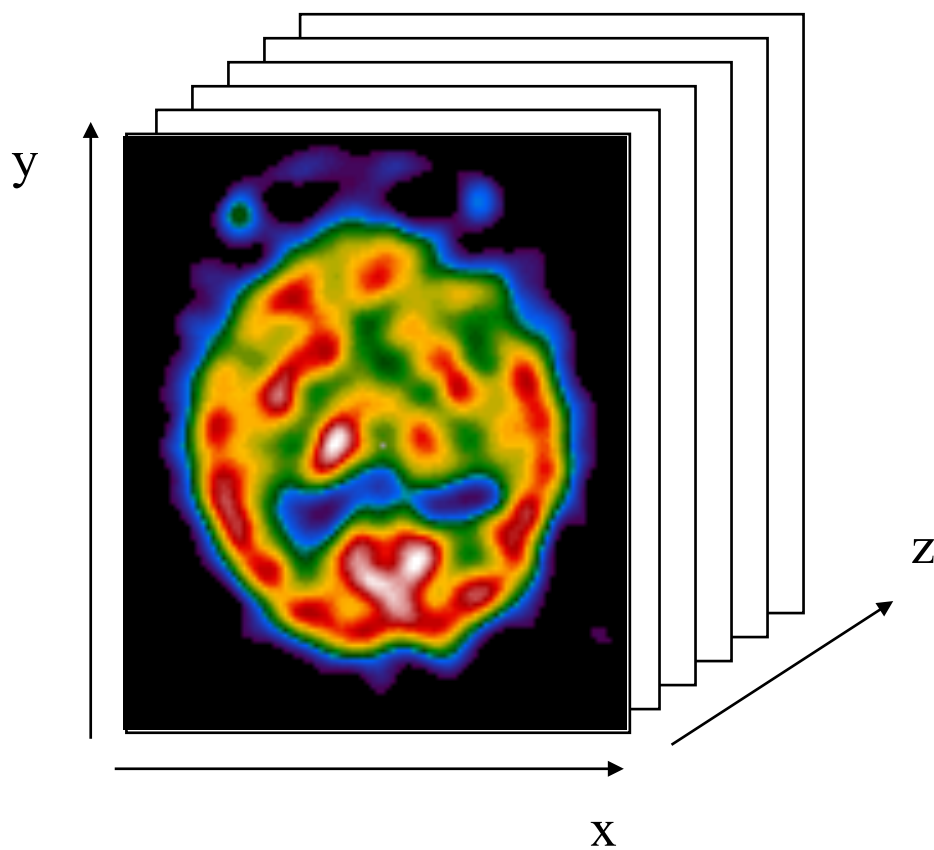
$$N = a_1 + a_2 + a_3$$

$$N = \int_0^D f(l) dl$$

# Problème à résoudre

---

- Objet à reconstruire : cartographie 3D de la concentration du radiotraceur dans l'organisme



# Traitement de l'information détectée

---



Estimer la distribution 3D du paramètre d'intérêt à partir des projections 2D mesurées

## Reconstruction tomographique

- Tomographie de transmission  
Paramètres d'intérêt = coefficient d'atténuation  $\mu$
- Tomographie d'émission  
Paramètres d'intérêt = carte d'activité

# Pourquoi faire de la tomographie ?

---

- Accès à une information volumique



- Rehaussement de contraste par rapport aux données projetées

Exemple en tomographie d'émission :

1	1	1	→ 3
1	3	1	→ 5
1	1	1	→ 3

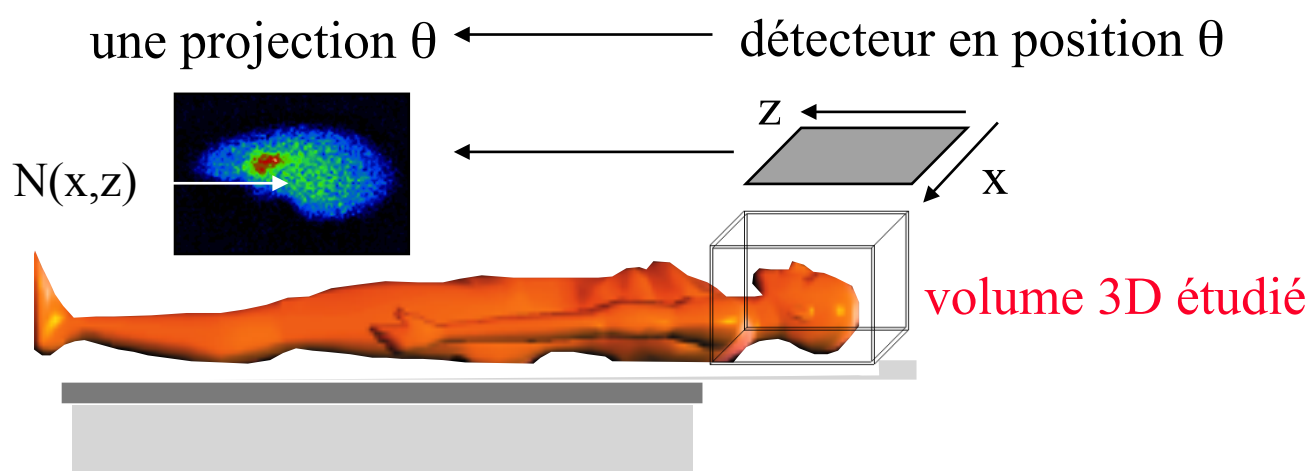
Contraste sur les projections :  $(5-3)/3 = 0,66$

Contraste sur les coupes :  $(3-1)/1 = 2$

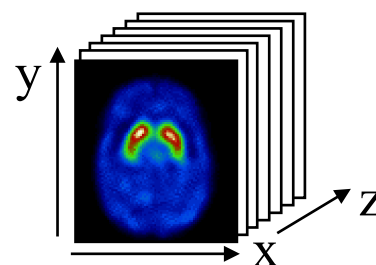
# Formulation du problème en 3D

---

- Un ensemble de projections 2D



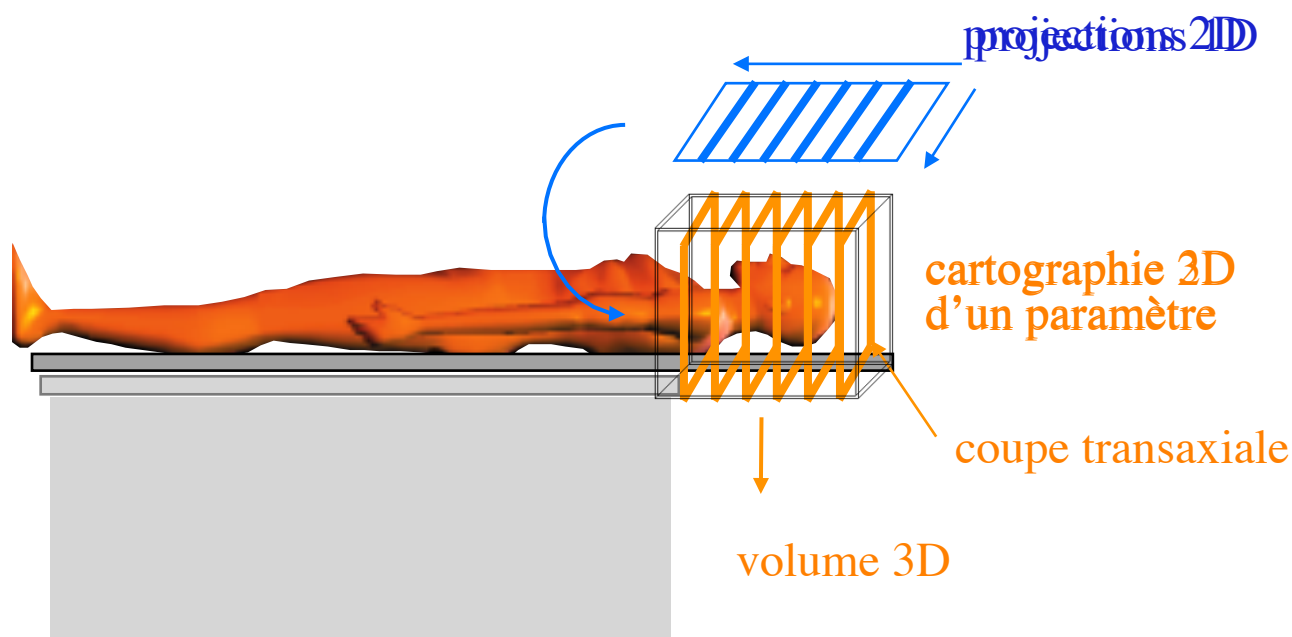
➔ reconstruction d'un objet 3D



# Factorisation du problème de reconstruction

---

volume 3D à partir d'images 2D



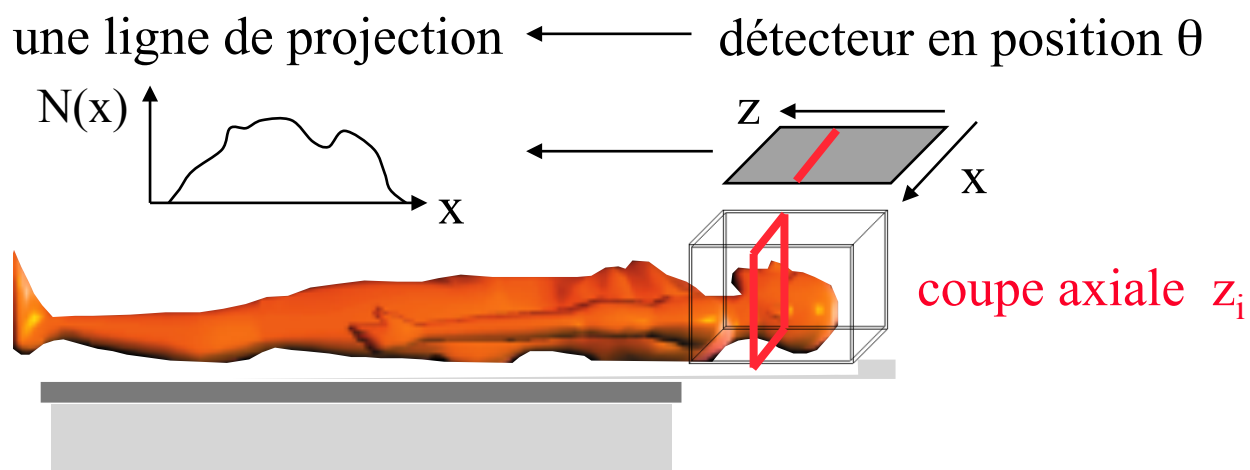
volume 3D reconstruit à partir de la reconstruction d'un ensemble d'images 2D

Dans un 1er temps, il suffit donc de comprendre comment on reconstruit l'image d'une coupe

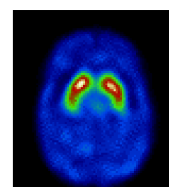
# Formulation du problème en 2D

---

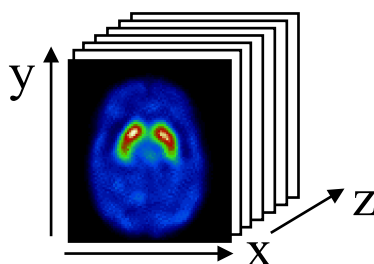
- Un ensemble de projections 1D



➔ reconstruction d'un objet 2D (coupe  $z_i$ )



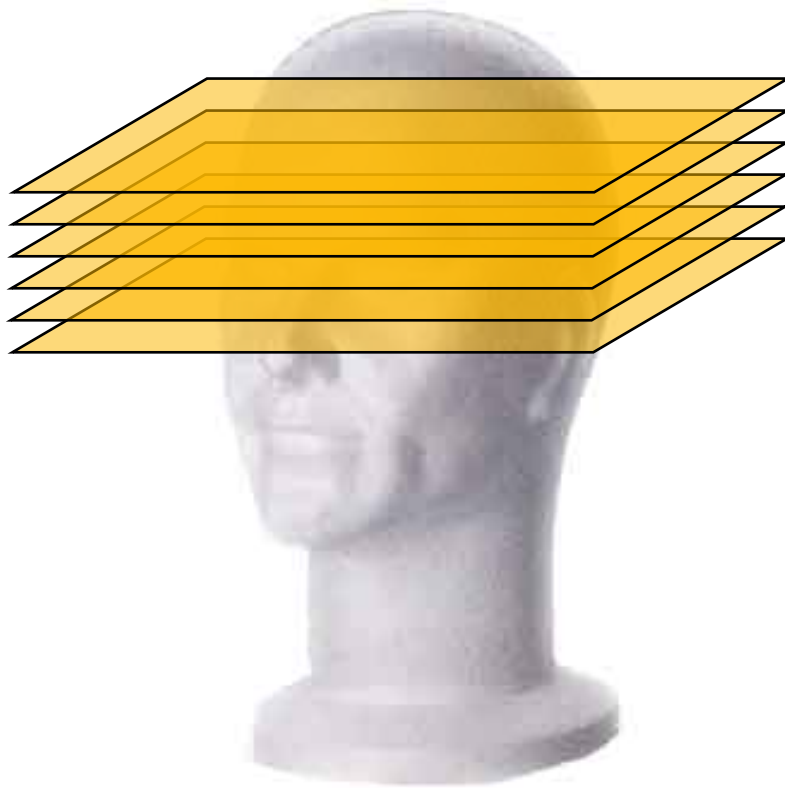
ensemble de coupes  $z_i$  = volume d'intérêt



# La reconstruction tomographique en général

---

- Estimation d'un volume 3D en reconstruisant indépendamment un ensemble de coupes 2D





# Pourquoi est-ce difficile ?

---



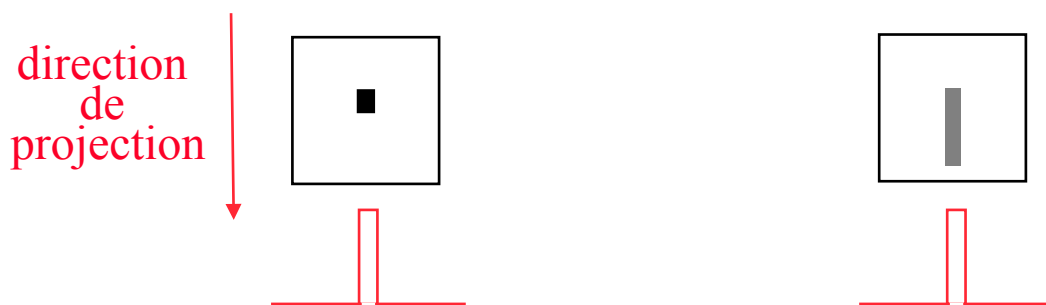
La leçon difficile, William Bouguereau (1825 - 1905)

# Non unicité de la solution

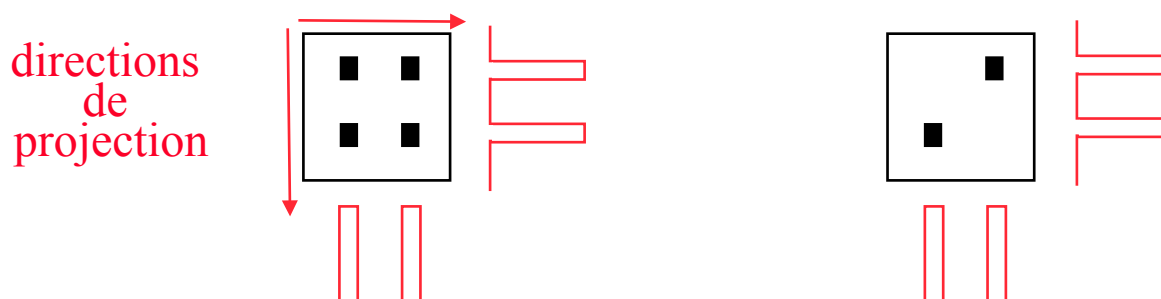
---

- Pas de solution unique : toujours plusieurs objets compatibles avec un ensemble fini de projections

1 projection : plusieurs solutions possibles



2 projections : plusieurs solutions possibles

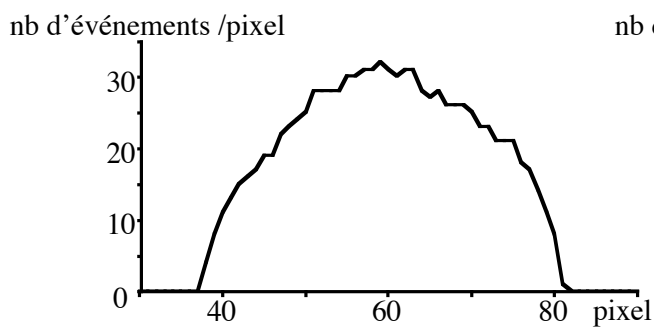


➔ Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

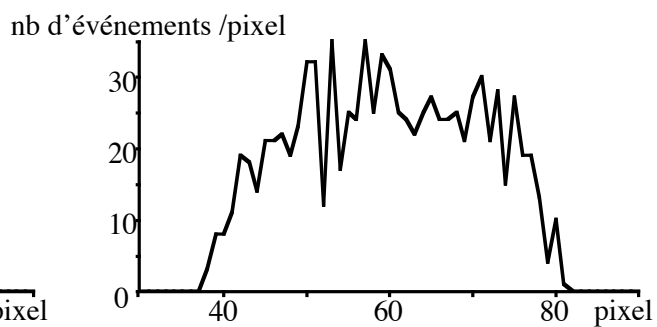
# Bruit

- Pas de solution du fait du bruit entachant les données

			mesures imparfaites	
10	11	9	→ 30	32
10	32	10	→ 52	50
11	8	10	→ 29	27



projection idéale



projection bruitée

# Problème inverse mal posé

---



- Problème inverse :  
On dispose de mesures et il faut trouver ce qui a produit ces mesures
  
- Problème mal posé :  
La solution est instable : une petite différence sur les projections peut conduire à des coupes reconstruites très différentes

# Notions de base

---



# Travaux princeps

---

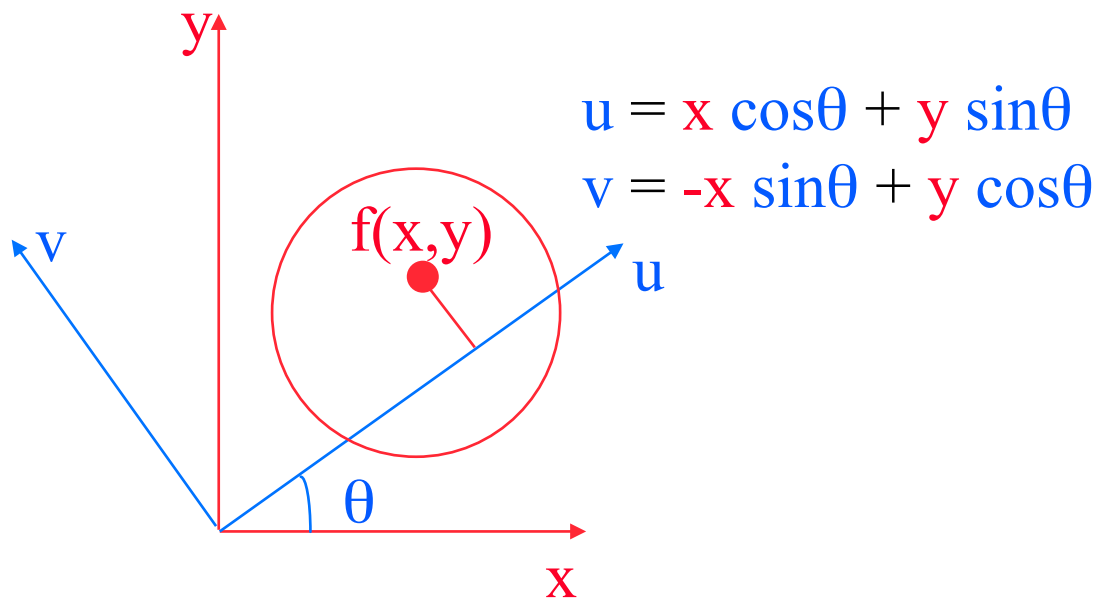
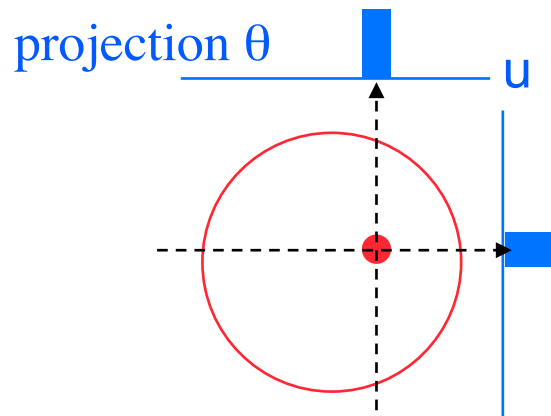


1887-1956

*1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”, Math. Phys. Klass*

# Formulation continue de l'opération de projection

---

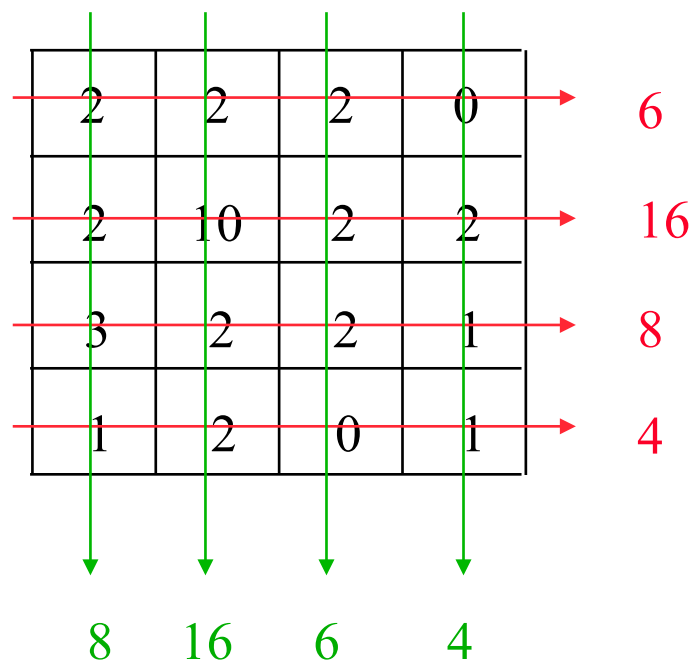


$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv$$

# Formulation discrète de l'opération de projection

---

- Calculer les 2 projections de la distribution d'activité représentée

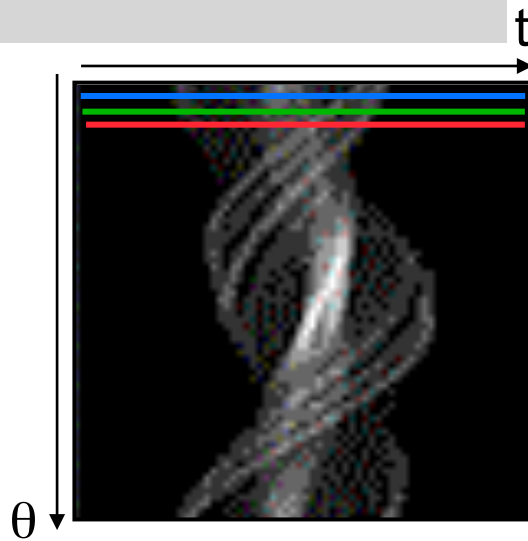
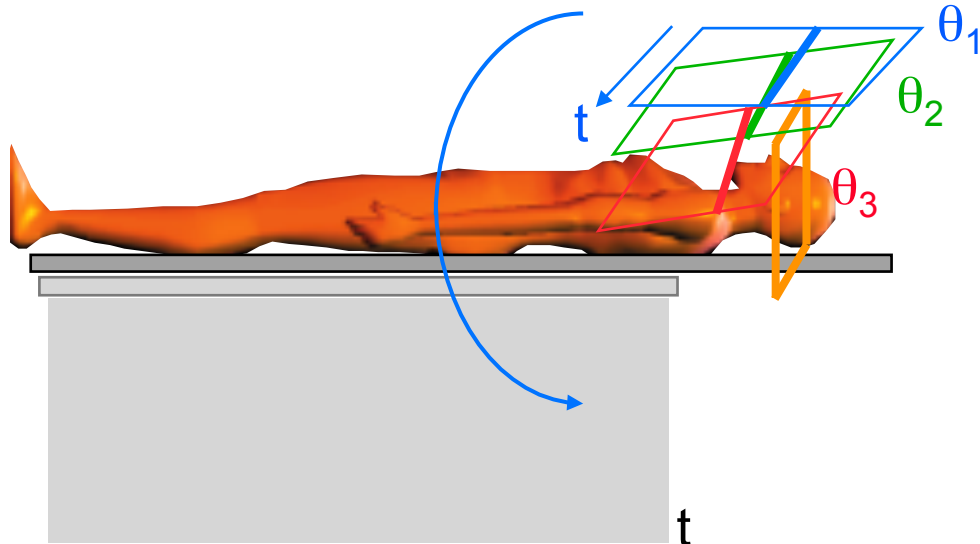






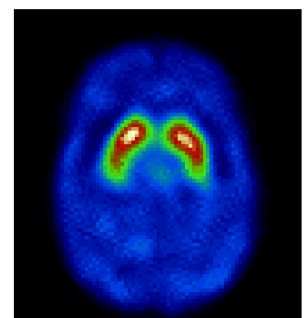
# Sinogramme

Sinogramme = signal issu d'une coupe  $z_i$  vue sous différentes incidences  $\theta$



sinogramme correspondant à la coupe  $z_i$

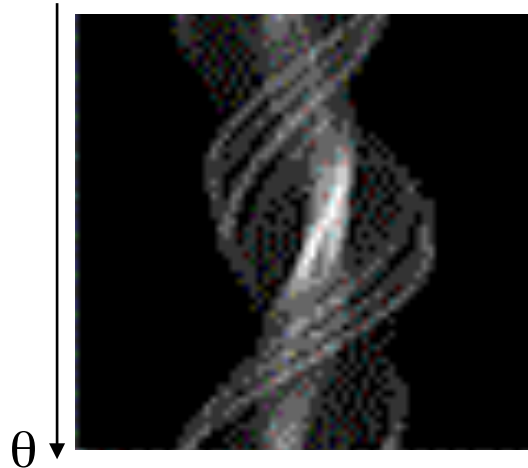
reconstruction tomographique → coupe  $z_i$



# Sinogrammes et projections

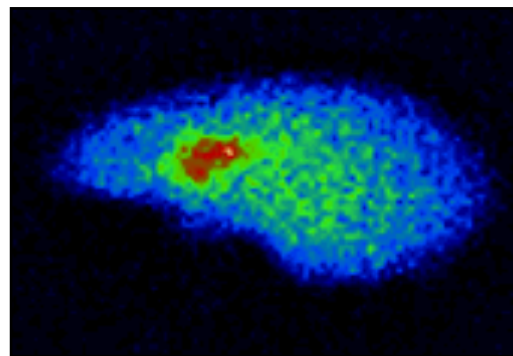
---

Les sinogrammes et les projections contiennent les mêmes informations : ils ne diffèrent que par l'organisation avec laquelle les informations sont représentés.



sinogramme correspondant à la coupe  $z_i$

Un sinogramme : toute l'information relative à une coupe, obtenue pour tous les angles de projection.



projection correspondant à l'angle  $\theta$

Une projection : l'information relative à toutes les coupes, mais pour une incidence angulaire unique.

## Compris ?

---

On dispose de 64 projections de dimension 128 pixels (dans la direction axiale ) x 256 pixels

- Combien de coupes transaxiales peut-on reconstruire sans interpolation ?

128

- Combien de sinogrammes peut-on former à partir de ces projections ?

128

- Quelles sont les dimensions d'un sinogramme ?

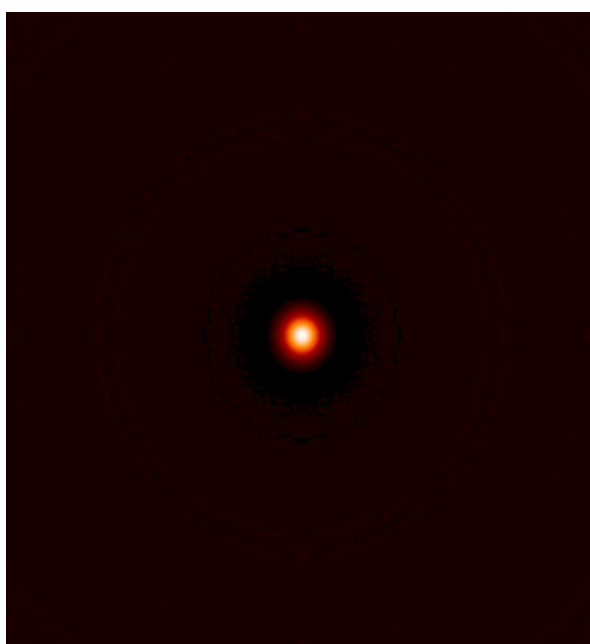
64 lignes et 256 colonnes



# Compris ?

---

Tomographie d'émission :  
Est-ce une projection ou un sinogramme ?

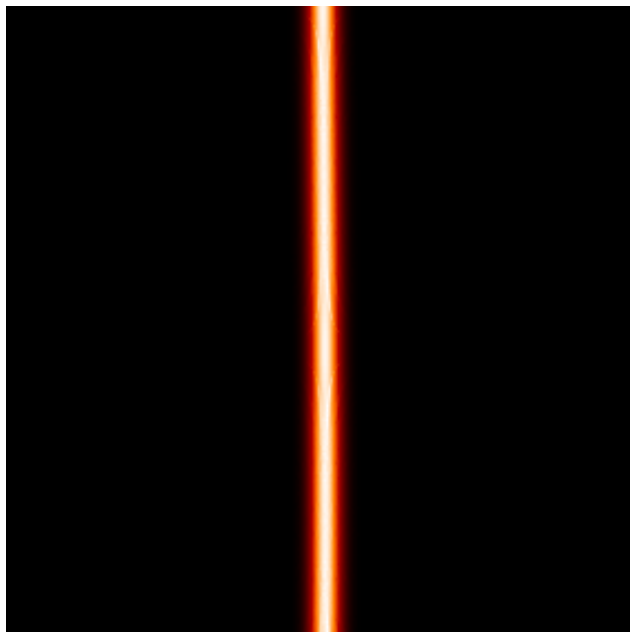
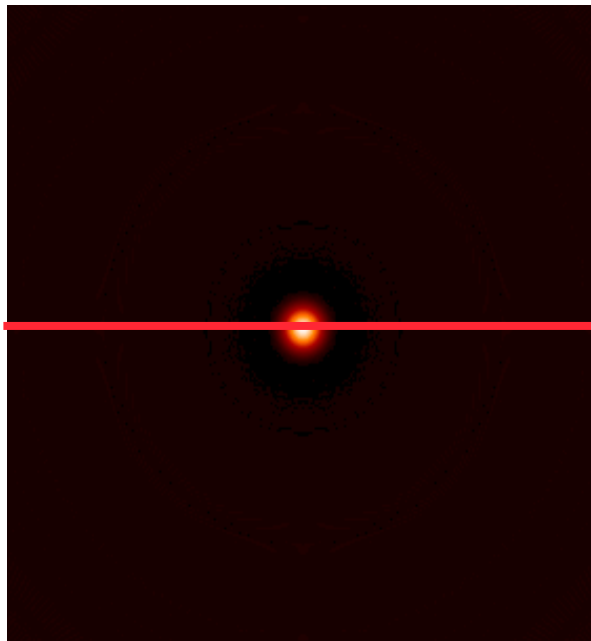


# Compris ?

---

Tomographie d'émission :

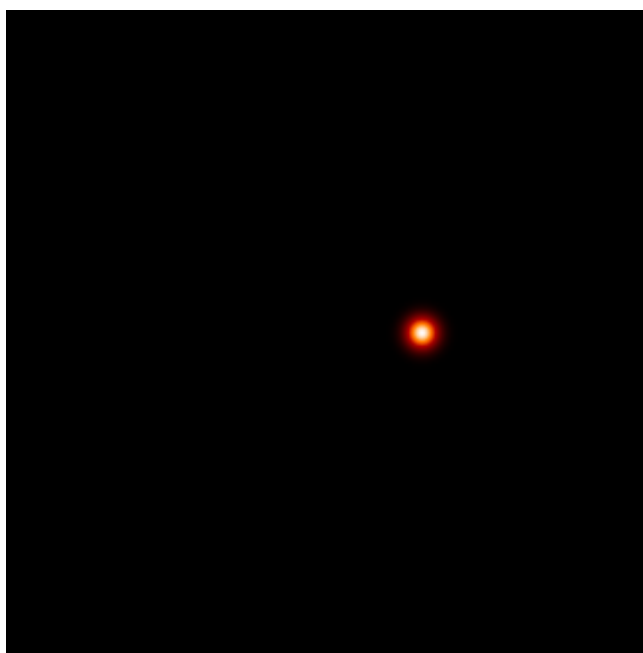
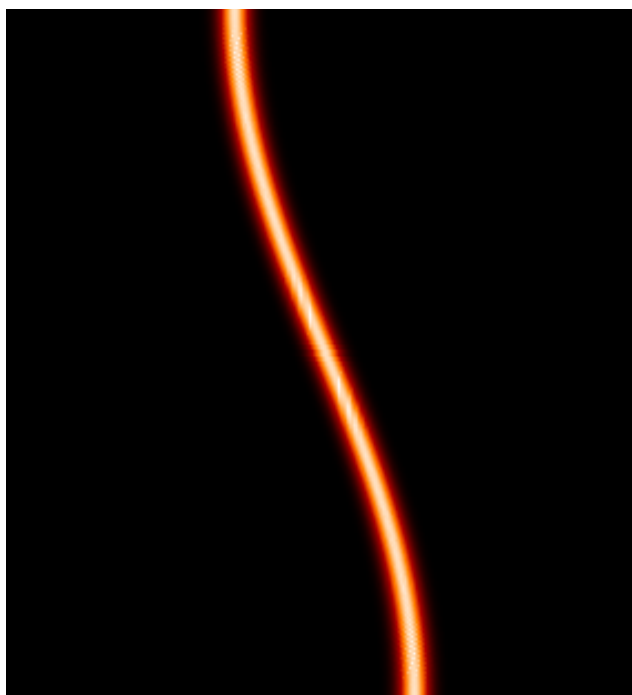
Si toutes les projections sont identiques à celles-ci, quel est le sinogramme correspond à la coupe indiquée ?



# Compris ?

---

Tomographie d'émission :  
A quoi correspond ce sinogramme ?



# Deux approches à la reconstruction tomographique

---

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R f$$



# Les méthodes analytiques : introduction

---

- Inversion analytique de la transformée de Radon = résolution d'équations intégrales
- Expression continue du problème de reconstruction tomographique
- Méthode la plus courante : rétroprojection filtrée

## FBP : Filtered BackProjection

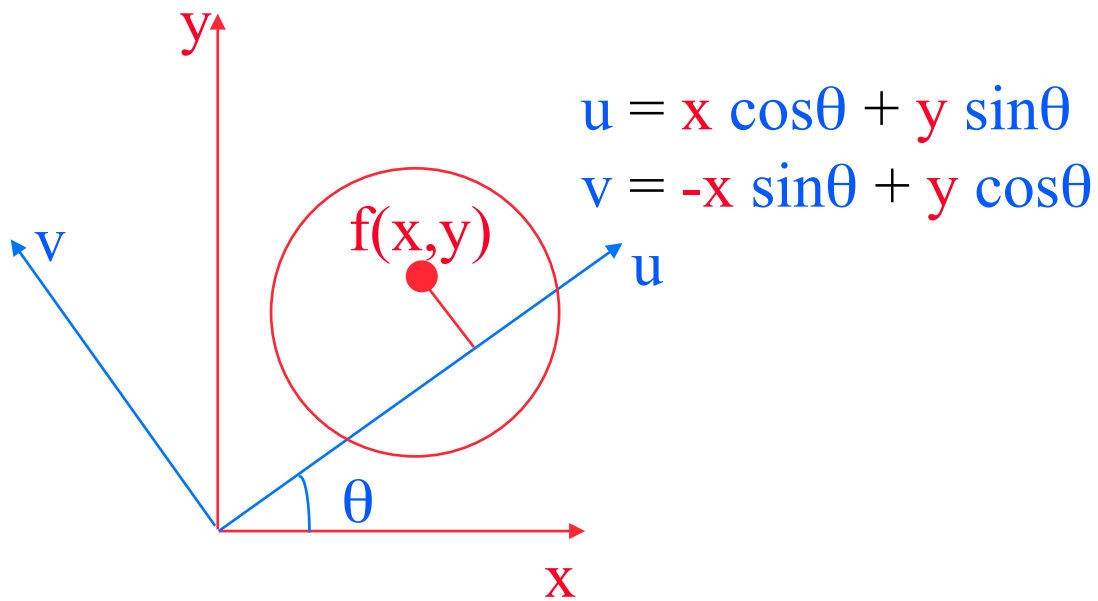
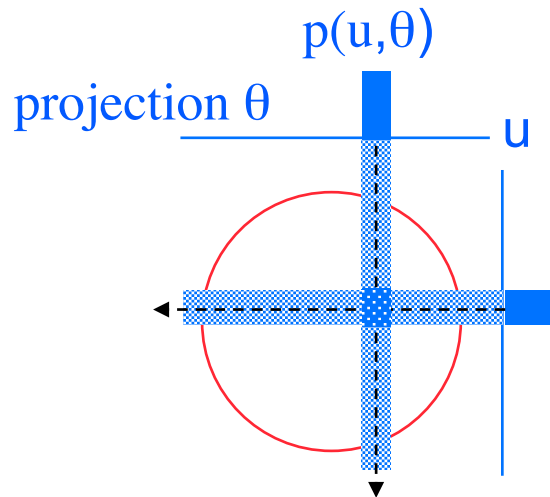
- Méthodes rapides



- Méthodes disponibles sur tous les dispositifs d'acquisition commercialisés (scanner X, SPECT, PET)

# Opération de rétroprojection : expression continue

---



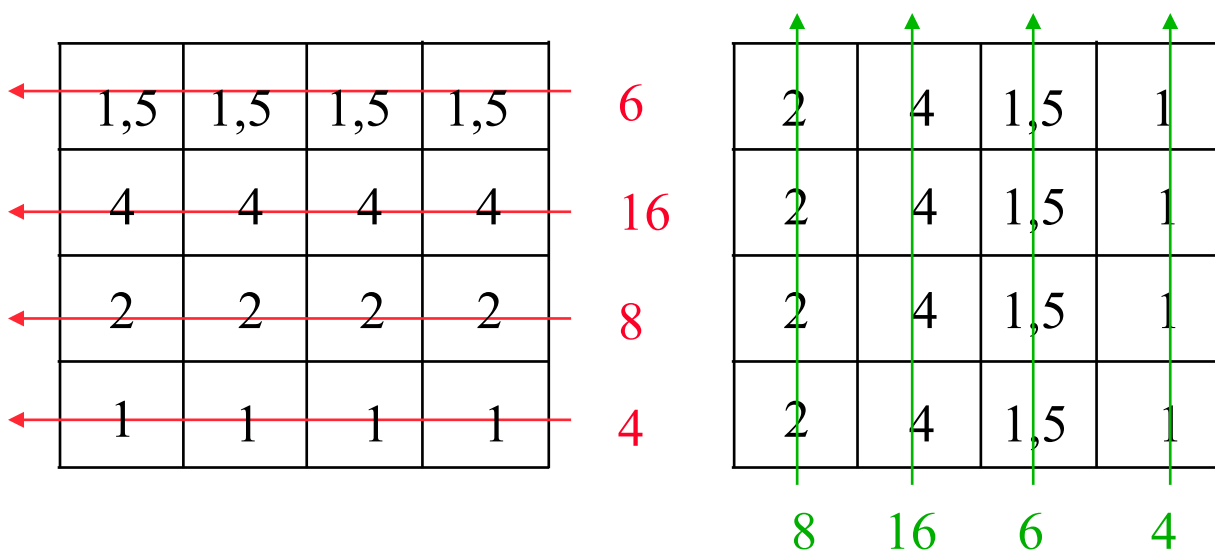
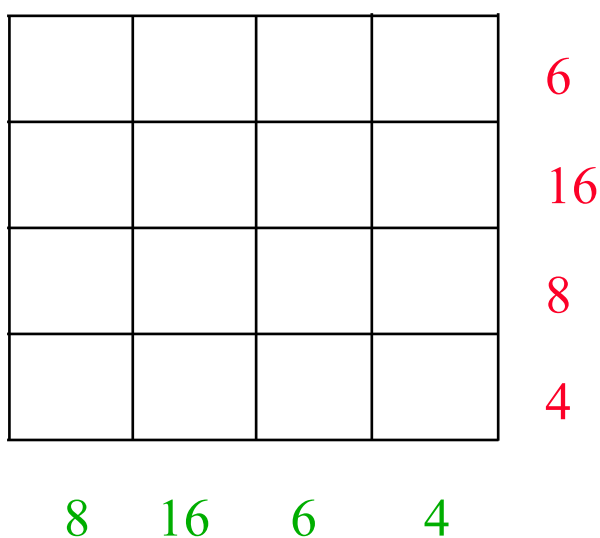
$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

Attention : la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon

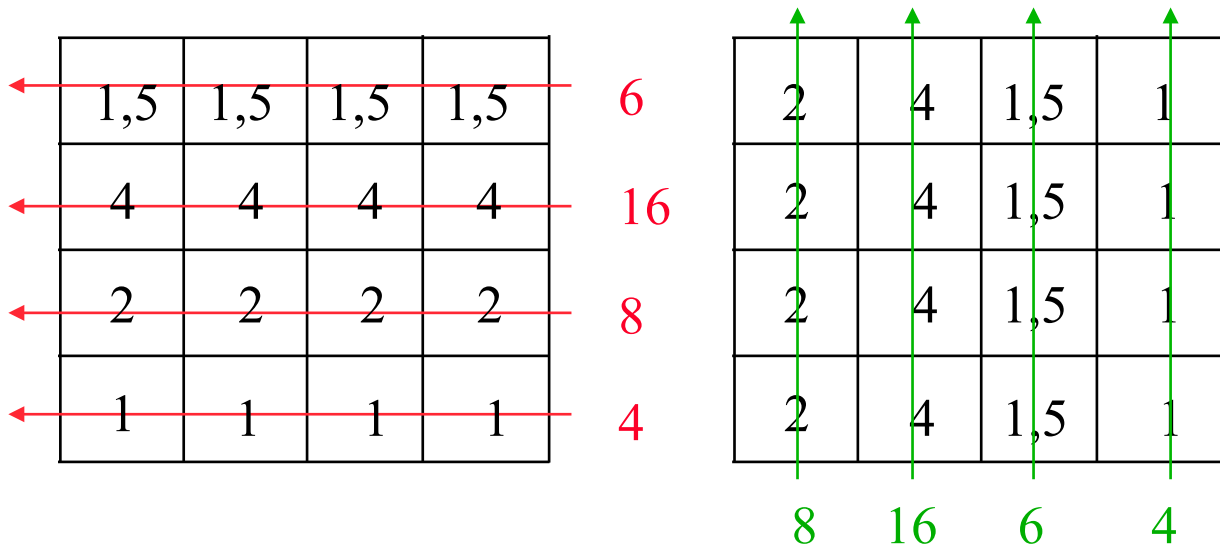
# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection

---

- Calculer la rétroprojection des projections mesurées



# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection



Moyenne :

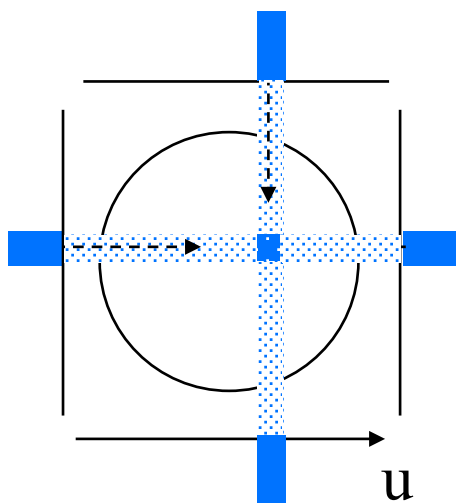
1,75	2,75	1,5	1,25
3	4	2,75	2,5
2	3	1,75	1,5
1,5	2,5	1,25	1

Image originale :

2	2	2	0
2	10	2	2
3	2	2	1
1	2	0	1

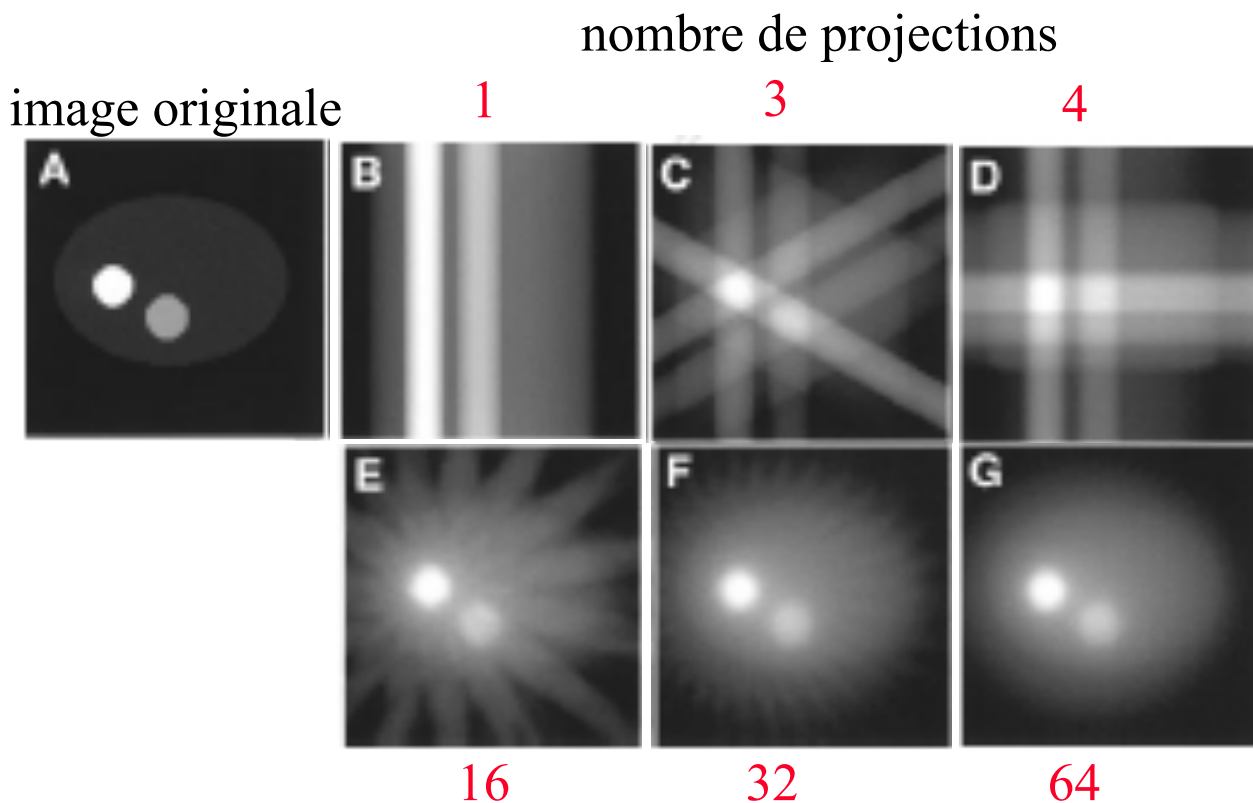
**Attention : la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon**

# Limites de la rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

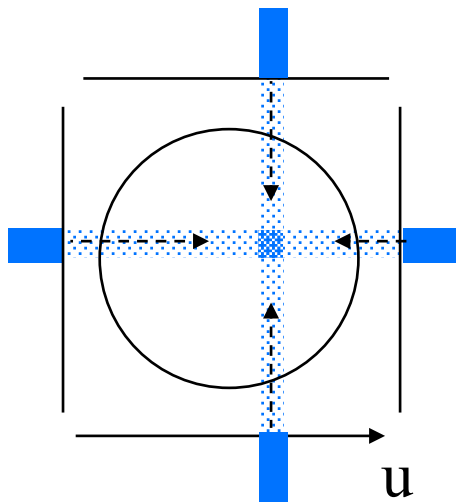
rétroprojection simple  
 → artefacts d'épandage en étoile



La rétroprojection n'inverse pas la transformée de Radon

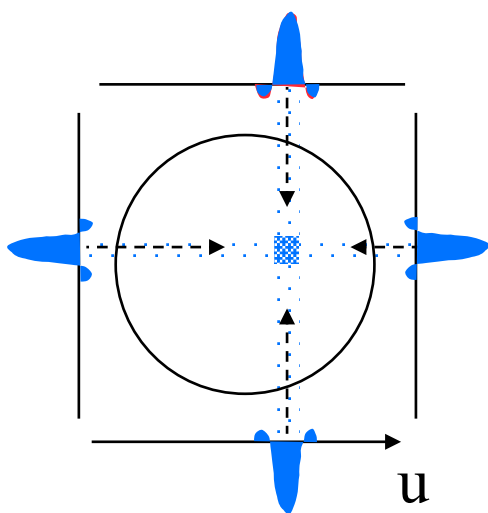
# Rétroprojection filtrée : principe

---



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

↑  
projection filtrée

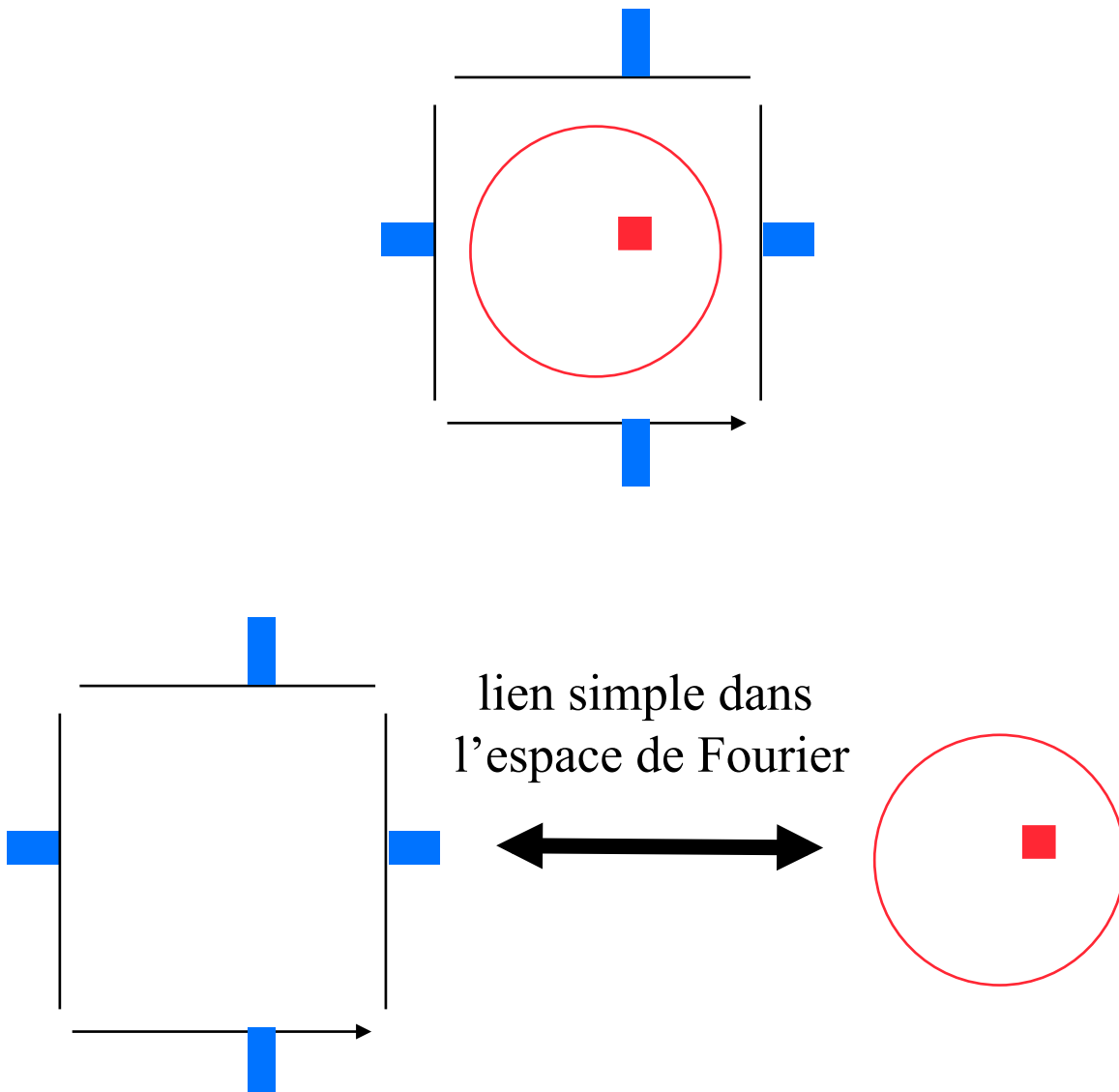
rétroprojection filtrée :  
réduction des artefacts  
inversion exacte de la transformée de Radon

# Quel filtrage ?

---

Le filtre qui permet d'inverser exactement la transformée de Radon peut être dérivé théoriquement, en vertu du théorème de la coupe centrale

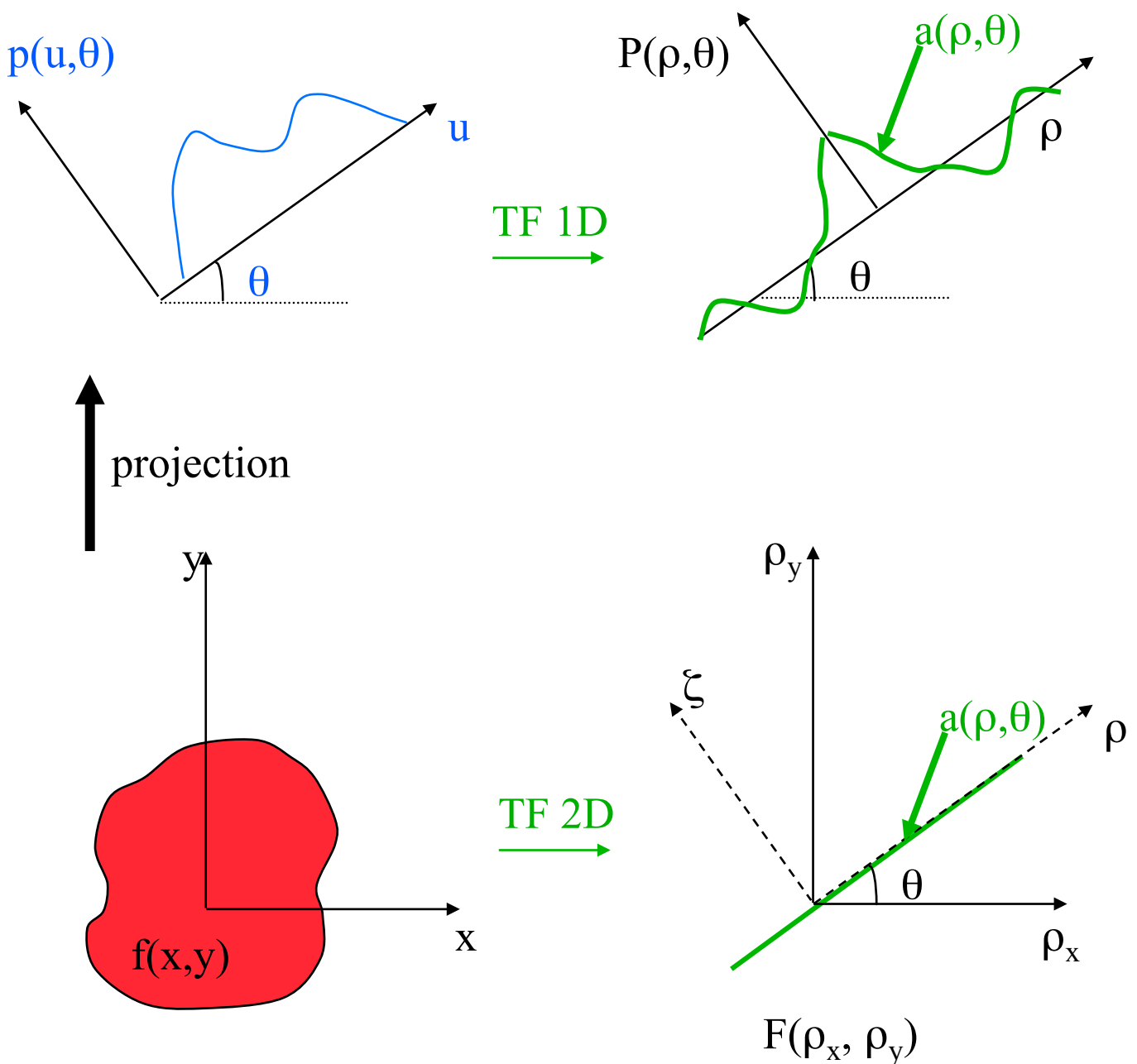
Ce théorème donne le lien entre les projections et l'objet dans l'espace de Fourier



# Théorème de la coupe centrale (TCC)

TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à  $u$   
 =  
 TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

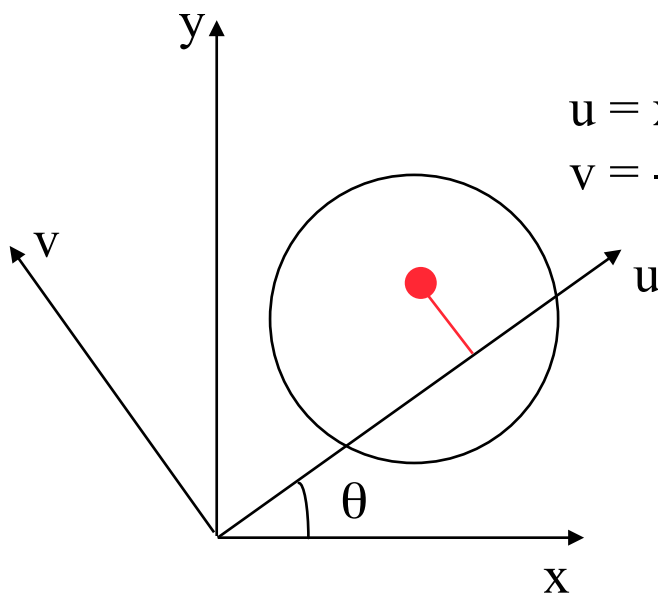
$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y) \Big|_{\xi=0}$$





# Théorème de la coupe centrale : démonstration

$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv \xrightarrow{\text{transformée de Fourier (TF)}} P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, \theta) e^{-i2\pi\rho u} du$$



$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$\rho_x = \rho \cos \theta$$

$$\rho_y = \rho \sin \theta$$

$$du \cdot dv = dx \cdot dy$$

changement de variable :  $(u, v) \longrightarrow (x, y)$

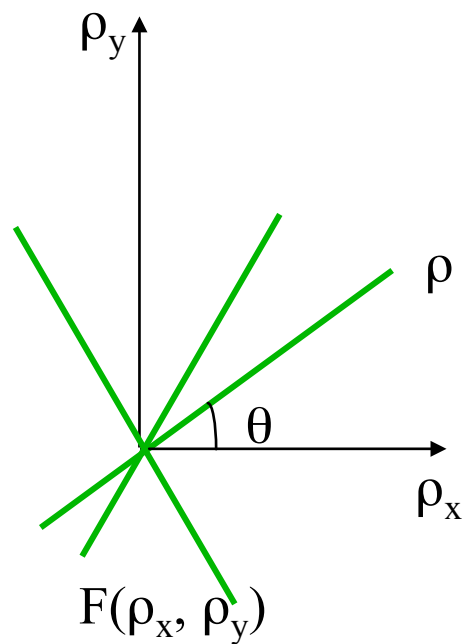
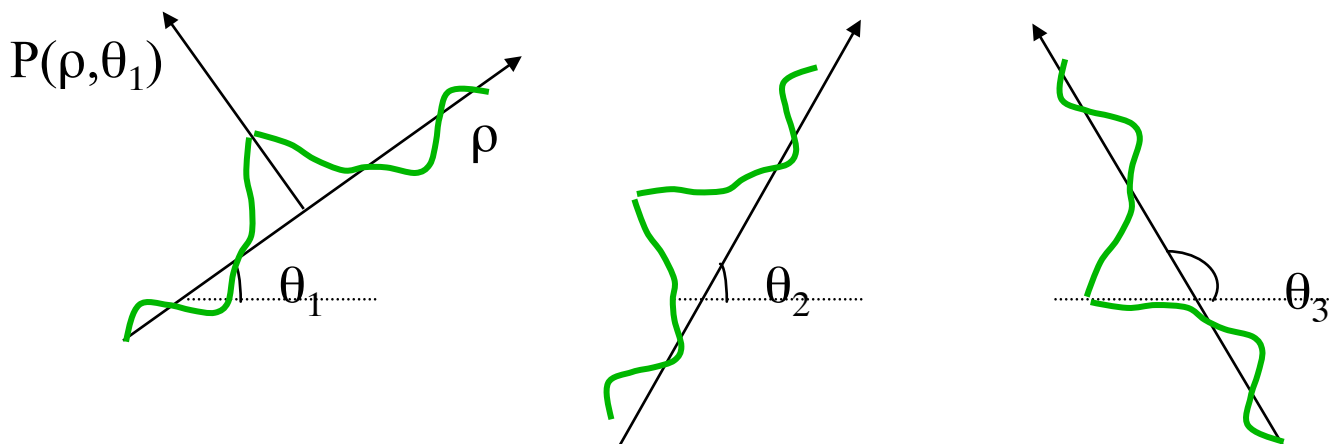
$$P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\rho u} du dv \xrightarrow{\downarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} dx dy$$

TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à u  
 =  
 TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

# Rétroprojection filtrée : principe

---

Si on a  $P(\rho, \theta)$  pour tous les angles  $\theta$  entre 0 et  $\pi$ , on peut reconstruire la transformée de Fourier de l'objet, et donc l'objet



# Rétroprojection filtrée : démonstration

$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y)$$

$$f(x, y) \stackrel{\text{TF}^{-1}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\rho_x, \rho_y) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

$$\stackrel{\text{TCC}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

changement de variable :  $(\rho_x, \rho_y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$$\downarrow \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho \cos \theta \\ \rho_y &= \rho \sin \theta \\ \rho &= (\rho_x^2 + \rho_y^2)^{1/2} \\ d\rho_x \cdot d\rho_y &= \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \\ u &= x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi p'(u, \theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

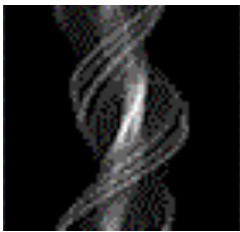
↑  
projections filtrées

↑  
filtre rampe

$$\begin{aligned} &\text{objet } f(x, y) \text{ à reconstruire} \\ &= \\ &\text{rétroprojection des projections filtrées} \end{aligned}$$

# Algorithme de rétroprojection filtrée

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$



sinogramme

$p(u,\theta)$



transformée de Fourier

$P(\rho,\theta)$

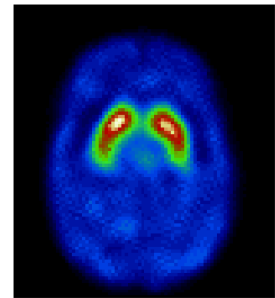


filtrage

$|\rho| P(\rho,\theta)$

Transformée de Fourier inverse

$p'(u,\theta)$



coupe reconstruite

$f(x,y)$



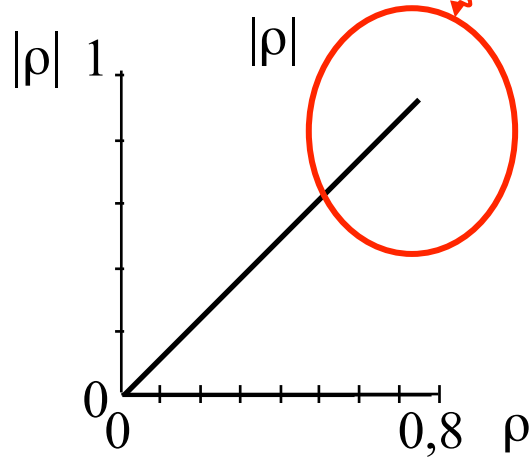
rétroprojection

# Insuffisance du filtre rampe

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑  
filtre rampe

amplification des hautes fréquences



filtre rampe

hautes fréquences = détails dans les images (haute résolution spatiale)

mais aussi ... bruit parasite



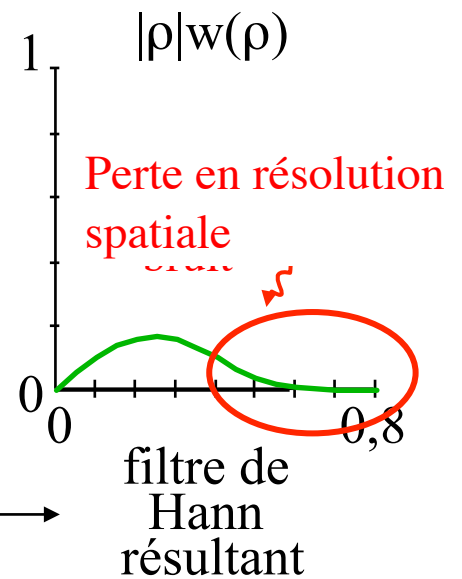
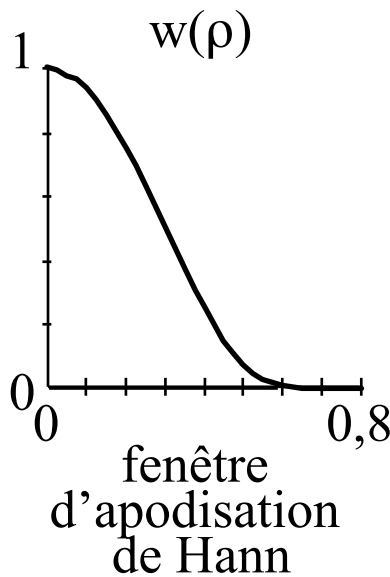
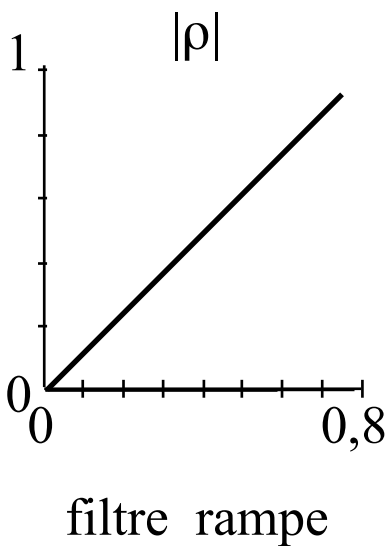
# Insuffisance du filtre rampe

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑  
filtre rampe

$$|\rho| \longrightarrow |\rho|w(\rho)$$

↑  
fenêtre d'apodisation



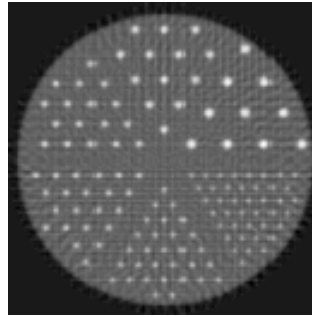
$$w(\rho) = \begin{cases} 0,5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases} \quad \text{domaine fréquentiel}$$

# Filtres classiques : filtre de Hann

---

- Filtre rampe

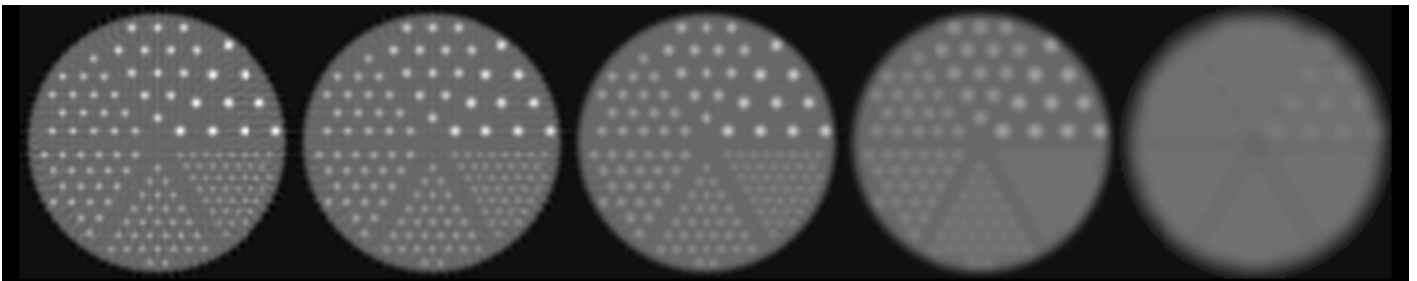
➡ meilleure résolution spatiale mais forte amplification du bruit haute fréquence



- Filtre de Hann

$$w(\rho) = \begin{cases} 0,5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ = 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases}$$

➡ modifie les moyennes fréquences



0,5

0,4

0,3

0,2

0,1

fréquence de coupure  $\rho_c$

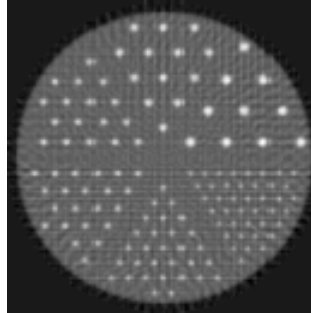


➡ plus faible est la fréquence de coupure, moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage

# Filtres classiques : filtre gaussien

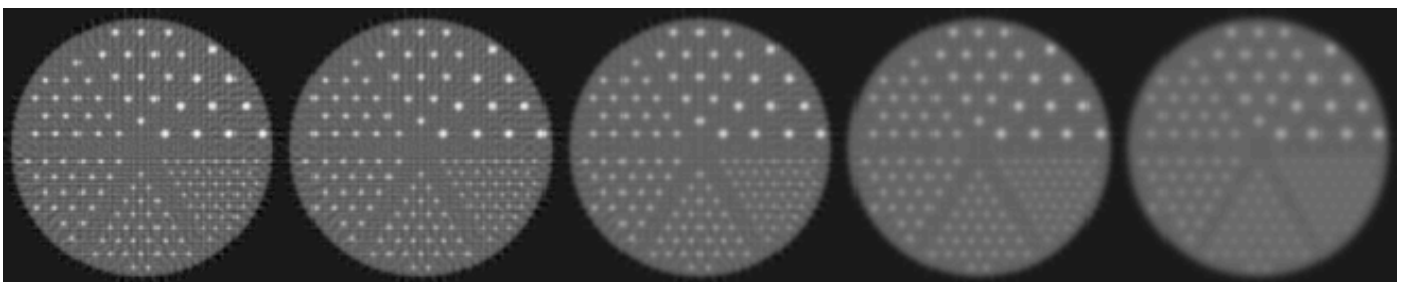
---

- Filtre rampe



- Filtre gaussien (domaine spatial)

$$c(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}).\exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2]$$



0

1

2

3

4

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2} \sigma \text{ (pixel)}$$



Caractérise l'étendue spatiale du filtre

➔ plus grande est la dispersion du filtre gaussien (FWHM ou  $\sigma$ ),

moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage

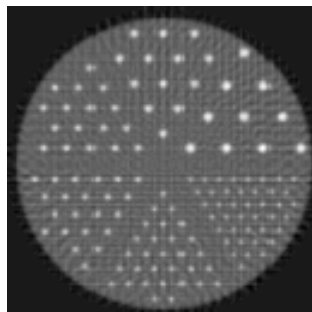




# Filtres classiques : filtre de Butterworth

---

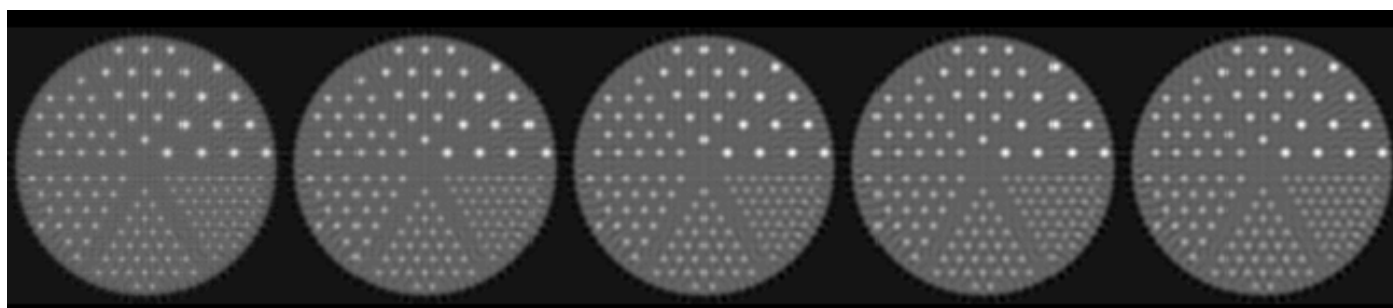
- Filtre rampe



- Filtre de Butterworth

$$w(\rho) = 1/[1+(\rho/\rho_c)^{2n}] \quad \text{si } \rho < \rho_c$$

➔ 2 paramètres : fréquence de coupure  $\rho_c$  et ordre  $n$



10

8

6

4

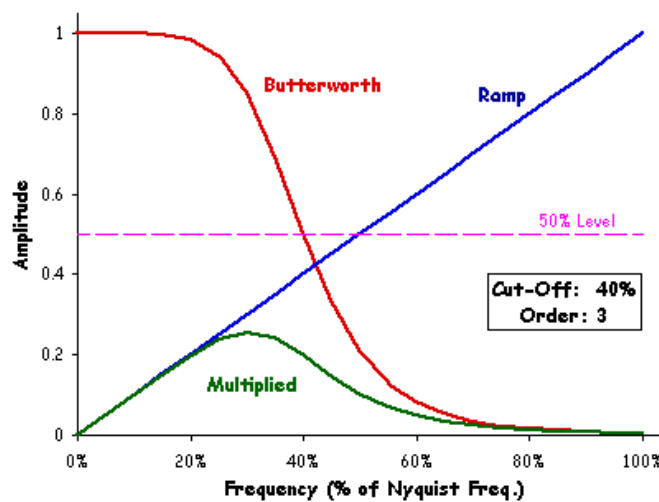
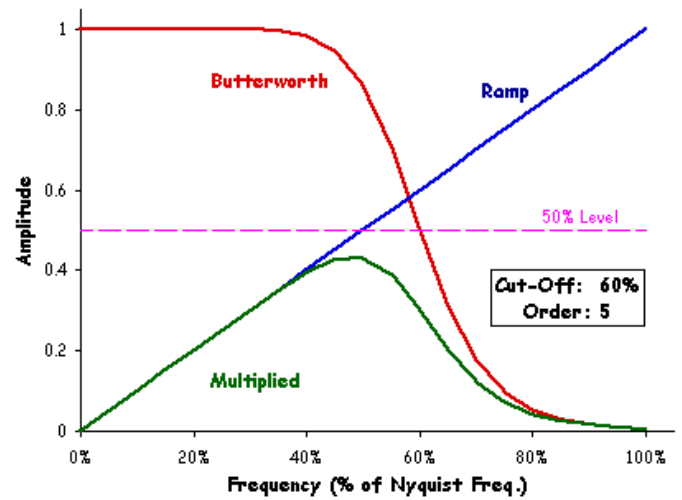
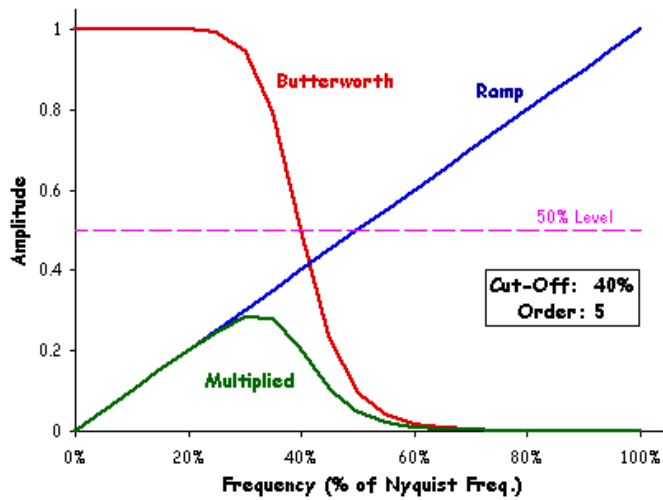
2

ordre  $n$ ,  $\rho_c=0,25$



➔ plus fort est l'ordre  
moins on préserve les détails "haute fréquence", i.e.,  
plus fort est le lissage

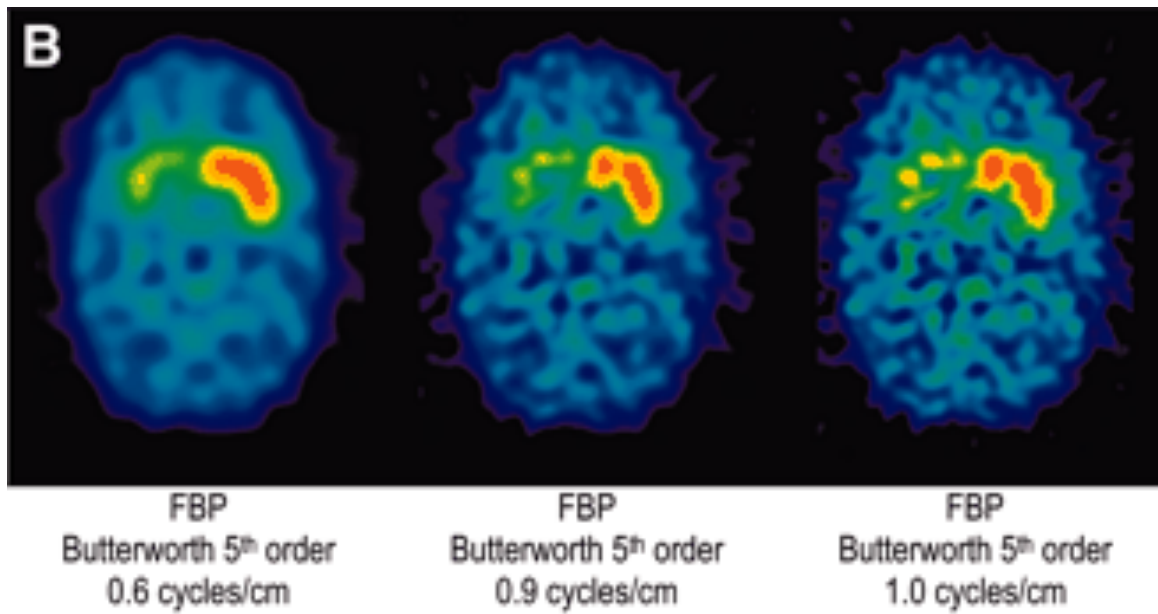
# Filtres classiques : filtre de Butterworth



# Importance de l'optimisation du filtre

---

- Un même filtre n'est pas adapté à toutes les situations



*Koch et al, J Nucl Med 2005*

Le filtre devrait être optimisé en fonction de la finalité des images (détection, quantification, ...), de la statistique de comptage, etc



# Implémentation du filtre

---

Il existe plusieurs façons d'implémenter un même filtre (e.g., espace spatial ou espace des fréquences) : l'usage d'un même filtre peut conduire à des résultats légèrement différents d'une console à l'autre



bec jaune, nombril pingouin, oiseau, fleur, nuage, neige  
montagne... et oreille gauche de la jument

# Méthodes de reconstruction analytique : discussion

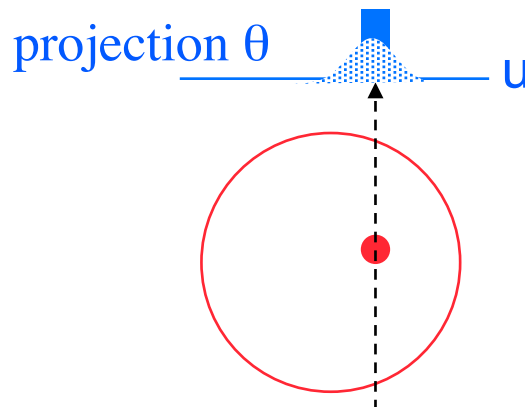
---

- Rapide



- Cependant, beaucoup d'approximations non vérifiées en pratique :

- modèle de lignes intégrales (résolution spatiale parfaite du détecteur)



- pas de prise en compte des fluctuations statistiques
- pas de prise en compte des perturbations physiques (atténuation, diffusion)
- données bruitées et sous-échantillonnées

➔ Approche alternative : la reconstruction discrète, ou itérative

# Deux approches à la reconstruction tomographique

---

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R f$$

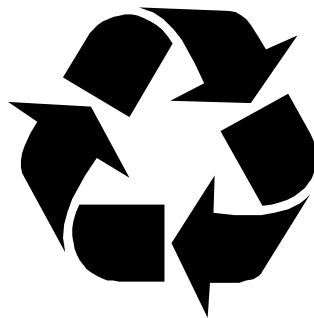
# Méthodes de reconstruction itératives : introduction

---

- Expression discrète et matricielle du problème de reconstruction tomographique  
Plus d'intégrales !

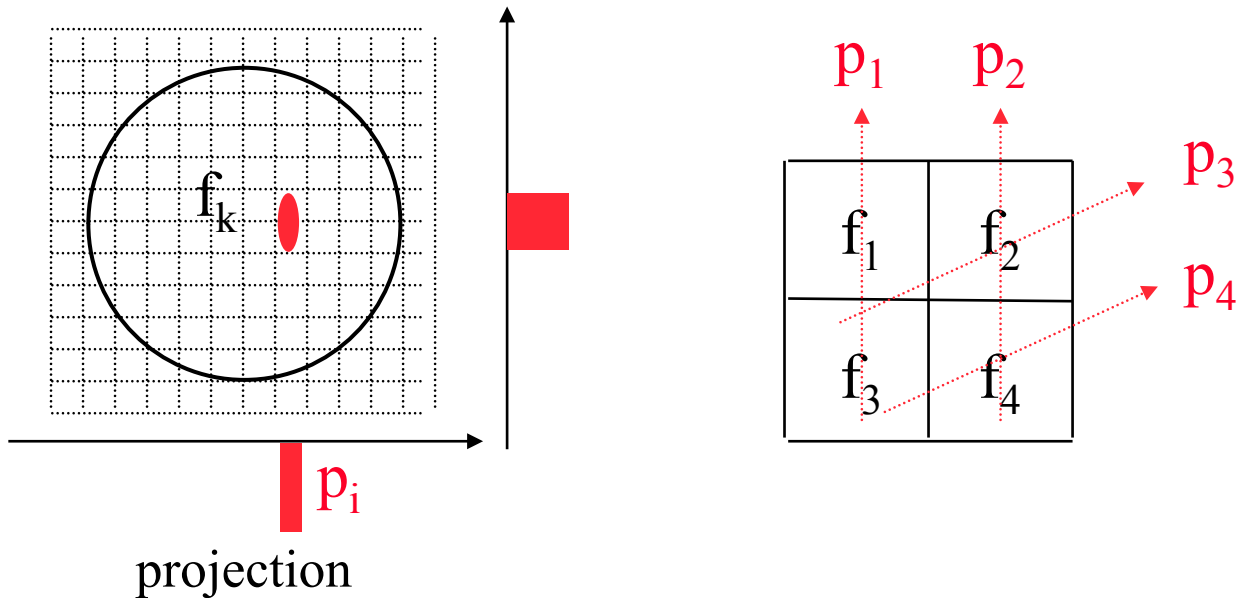
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & & & r_{14} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ r_{41} & & & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

- Inversion itérative du système d'équations



# Expression discrète du problème de reconstruction

---



$$\begin{aligned} p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4 \\ p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24} f_4 \\ p_3 &= r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34} f_4 \\ p_4 &= r_{41} f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44} f_4 \end{aligned}$$

En pratique :  
système d'équations de grande taille  
128 projections 128 x 128

2 097 152 équations à autant d'inconnues



# Expression matricielle du problème de reconstruction

---

$$\begin{aligned} p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4 \\ p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24} f_4 \\ p_3 &= r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34} f_4 \\ p_4 &= r_{41} f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44} f_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & & & r_{14} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ r_{41} & & & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

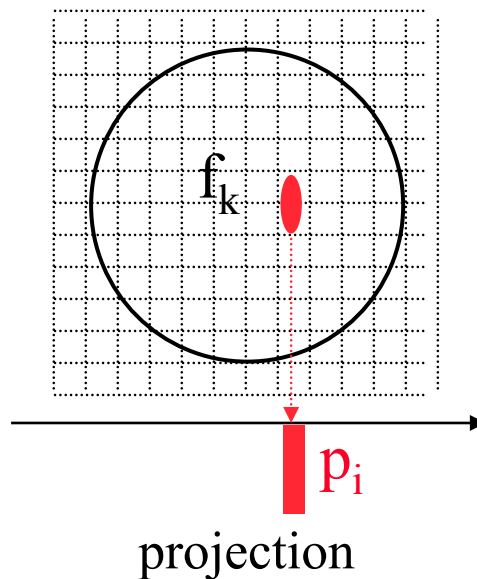
$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{f} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \text{projections} & & \text{objet à} \\ \text{acquises} & \text{opérateur} & \text{reconstruire} \\ & \text{de projection} & \end{array}$$

➡ **Problème : déterminer  $f$  connaissant  $p$  et  $R$**

A quoi correspond  $R$  ?

---

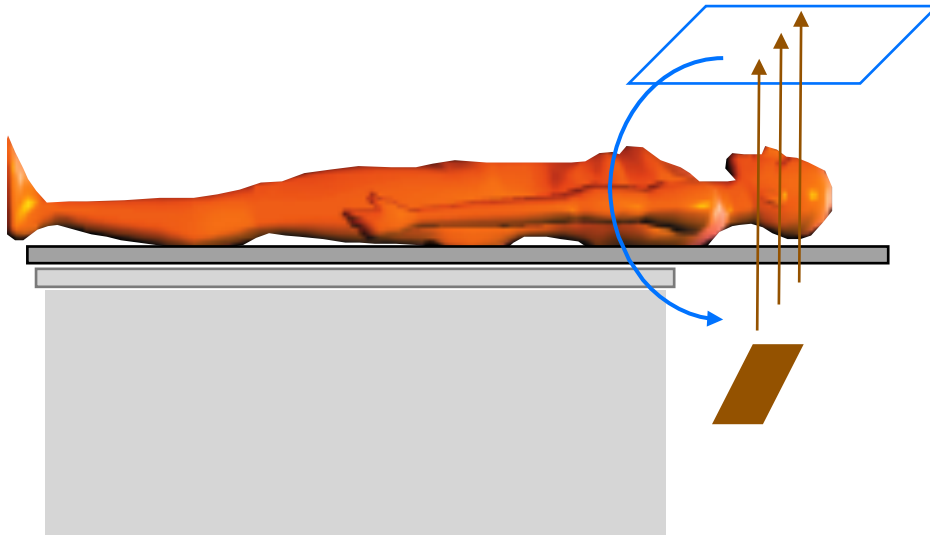
$$p = R f$$



$R$  décrit le processus de projection, i.e. le processus de formation des images :  
modélisation du modèle direct

$R_{ik}$  : probabilité qu'un événement émis dans le pixel  $k$  soit détecté dans le pixel de projection  $i$

# Dimension du problème



$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{f}$$

↑
↑
↑

projections acquises      opérateur de projection      objet à reconstruire

$$\begin{aligned}
 p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + \dots + r_{1F} f_F \\
 p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + \dots + r_{2F} f_F \\
 &\dots \\
 p_P &= r_{P1} f_1 + r_{P2} f_2 + \dots + r_{PF} f_F
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1F} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{P1} & \dots & r_{PF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_F \end{bmatrix}$$

• Exemple : 120 projections de 128 lignes (direction axiale) et 64 colonnes (bins de projection)

- Pour reconstruire une coupe :

64 x 120 équations

64 x 64 inconnues

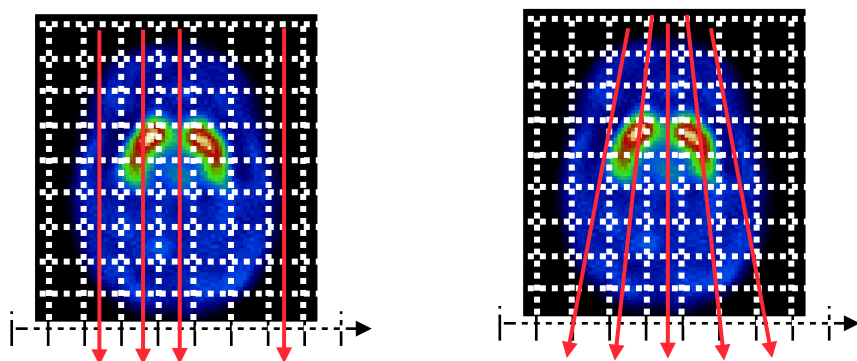
R est une matrice (64 x 120 ; 64 x 64)

# Calcul de l'opérateur de projection R

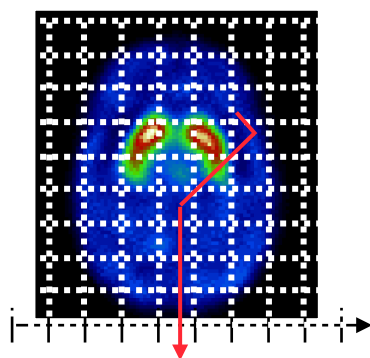
---

## Deux aspects

- Modélisation de la géométrie de détection



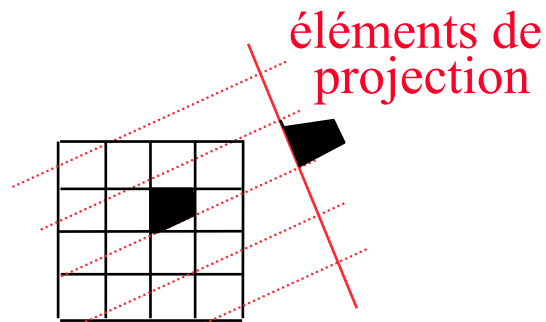
- Modélisation de la physique de détection



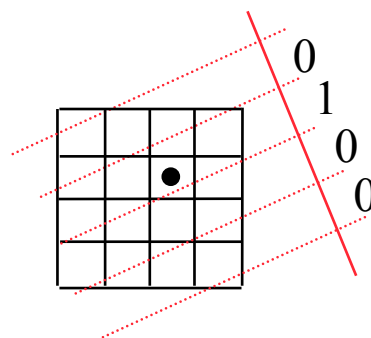
# Modélisation géométrique de l'opérateur R

---

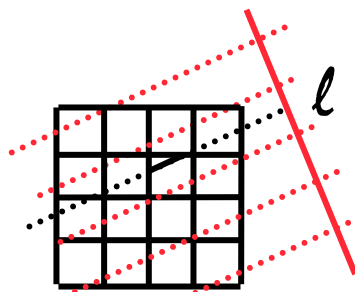
- Modèle de distribution de l'intensité des pixels :  
détermination de la contribution de chaque pixel  $i$  à un  
élément de projection  $k$



modèle exact  
= modèle uniforme



modèle de Dirac



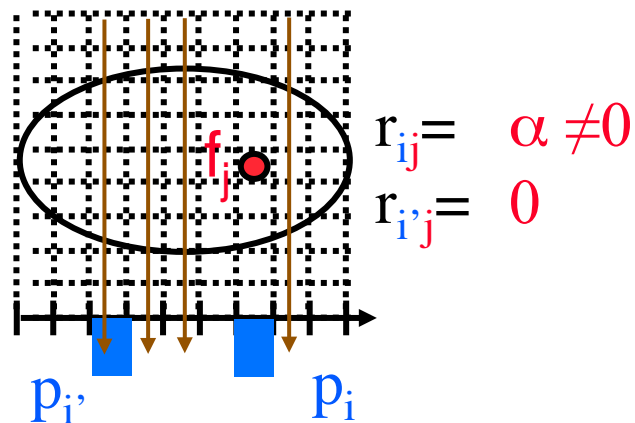
modèle de longueur  
de raies

# Modélisation géométrique de l'opérateur R

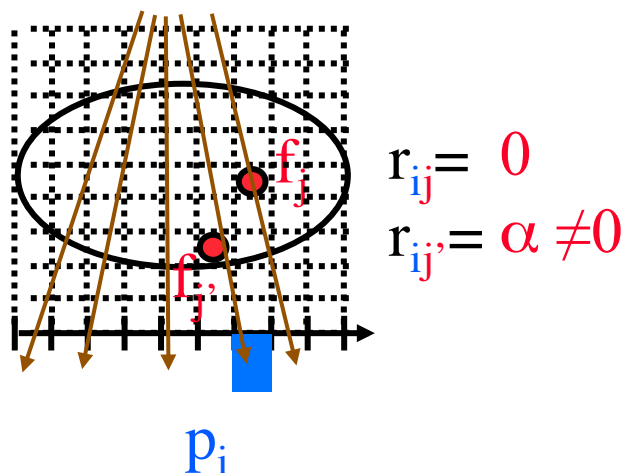
---

- Modèle de la géométrie de détection (collimation)

géométrie parallèle

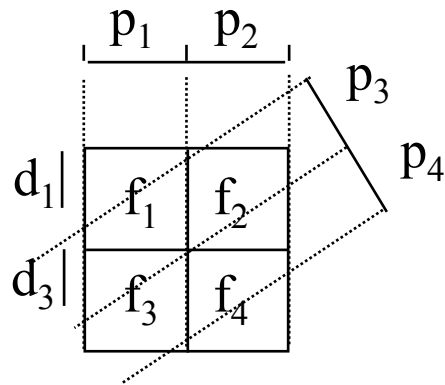


géométrie en éventail



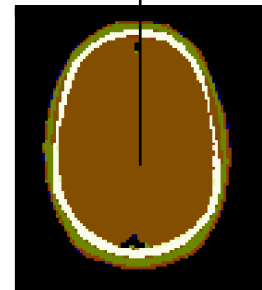
# Modélisation physique de l'opérateur R (1)

- Atténuation du signal (SPECT et PET)



contribution géométrique

$$p_1 = g_{11} f_1 \exp(-\mu_1 d_1) + g_{13} f_3 \exp(-\mu_3 d_3 - 2 \mu_1 d_1)$$



carte des  $\mu$

Dans ce cas :

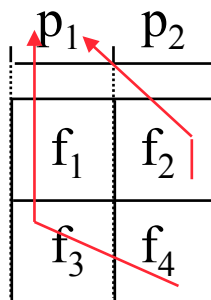
$$r_{11} = g_{11} \exp(-\mu_1 d_1)$$

$$r_{13} = g_{13} \exp(-\mu_3 d_3 - 2 \mu_1 d_1)$$

## Modélisation physique de l'opérateur R (2)

---

- Diffusion (SPECT et PET)



sans modélisation de la diffusion :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{13} f_3$$

avec modélisation de la diffusion :

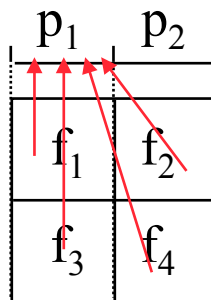
$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4$$



# Modélisation physique de l'opérateur R (3)

---

- Réponse du détecteur



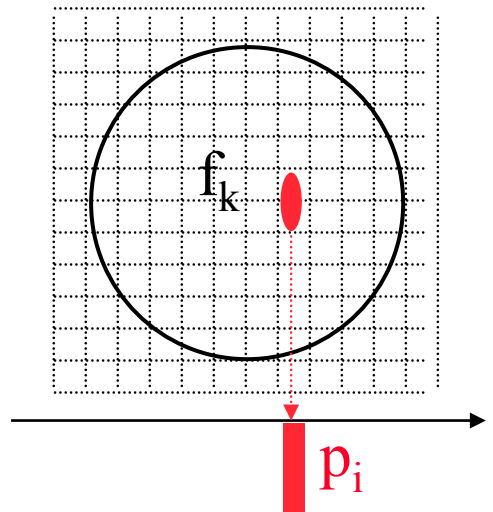
sans modélisation de la fonction de réponse du détecteur :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{13} f_3$$

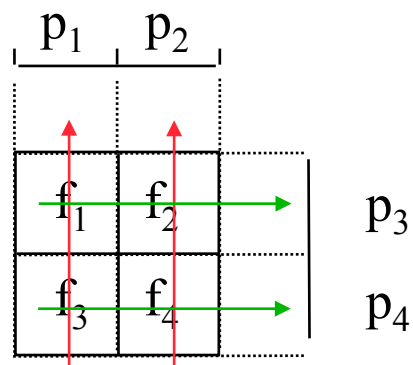
avec modélisation :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4$$

# Opérateur de projection R discret



projection



$$p_1 = f_1 + f_3$$

$$p_2 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = f_1 + f_2$$

$$p_4 = f_3 + f_4$$



$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Mise en oeuvre

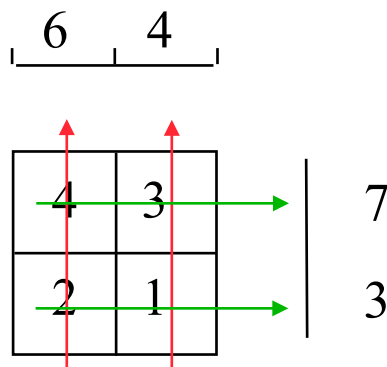
---

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

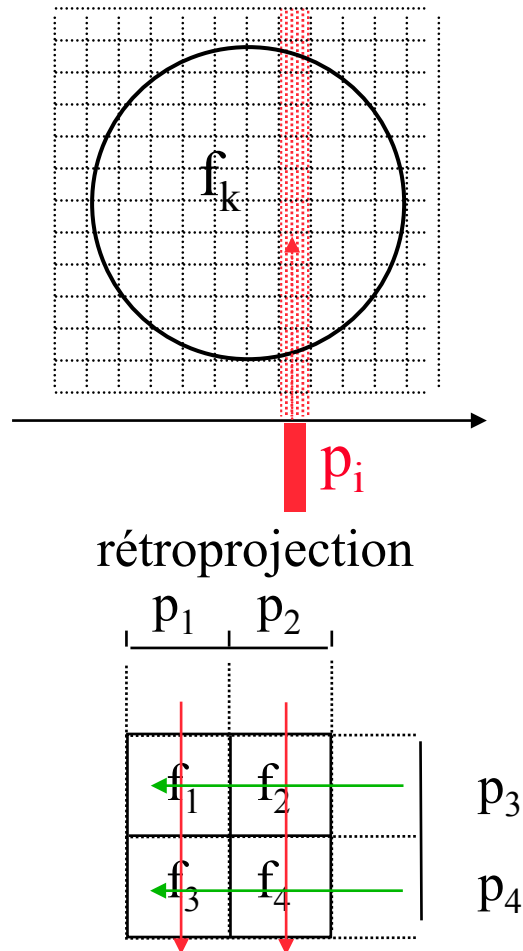
Calculer les projections de l'objet (4 3 2 1) :

$$\begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Représentation totalement équivalente :



# Opérateur de rétroprojection discret



$$f^*_1 = p_1 + p_3$$

$$f^*_2 = p_2 + p_3$$

$$f^*_3 = p_1 + p_4$$

$$f^*_4 = p_2 + p_4$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^t$$

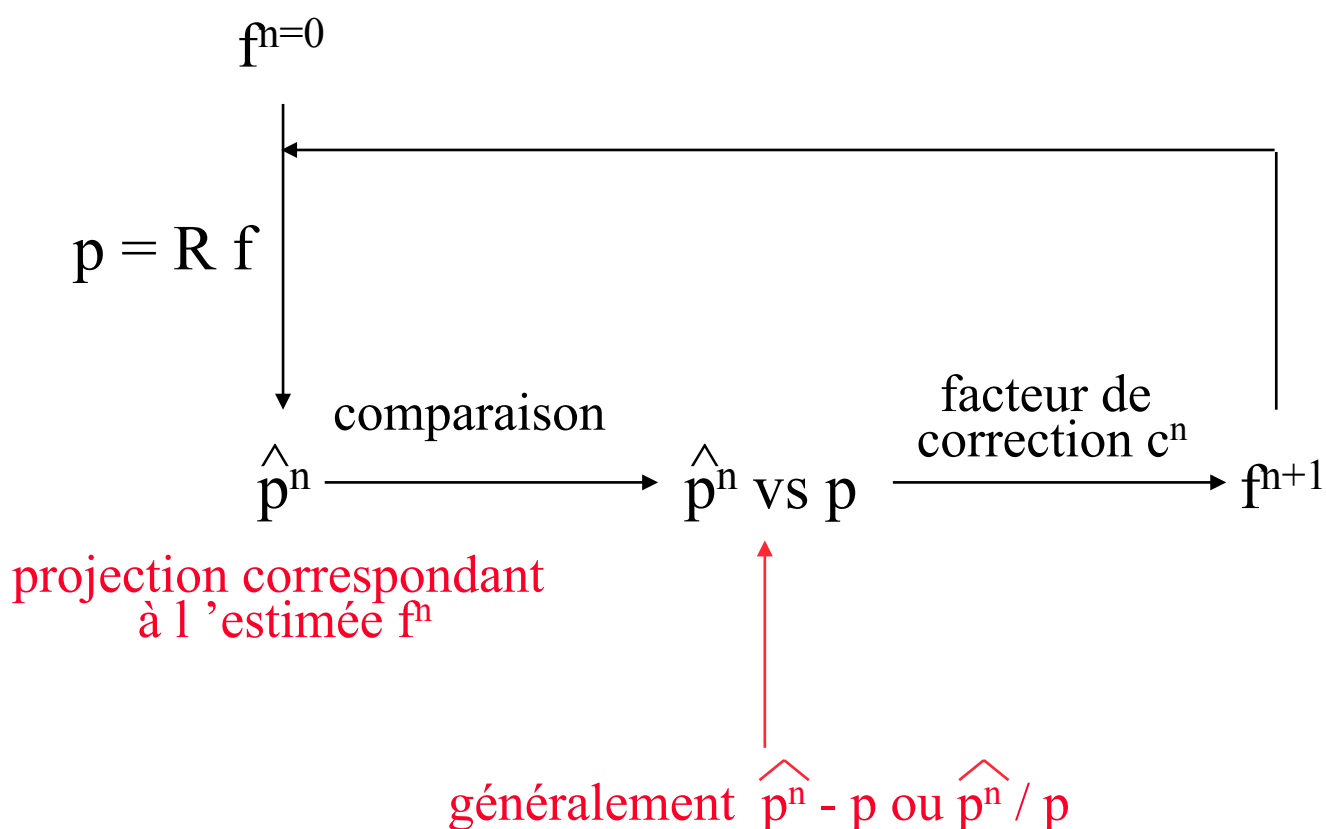
# Résolution du problème inverse

---

$$p = R f$$

Recherche d'une solution  $f$  minimisant une distance  $d(p, Rf)$ ,  $p$  et  $R$  étant connus

estimée initiale de  
l'objet à reconstruire



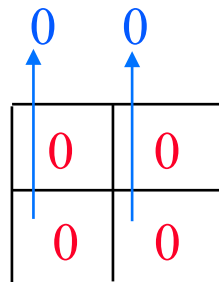
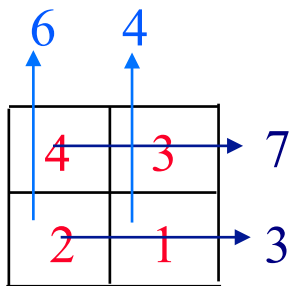
# Deux classes de méthodes discrètes itératives

---

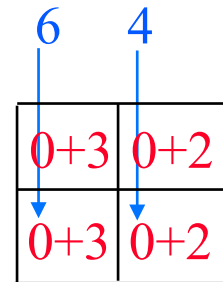
- Méthodes algébriques
  - méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires
  - minimisent  $\|p - R f\|_2^2$
  - ART, SIRT, ILST, gradient conjugué, etc
  
- Méthodes statistiques
  - estimation bayésienne
  - prennent en compte le bruit dans les données
  - maximisent une fonction de vraisemblance
  - MLEM, OSEM, RAMLA, DRAMA

# Exemple de méthode algébrique : ART

- Algebraic reconstruction technique

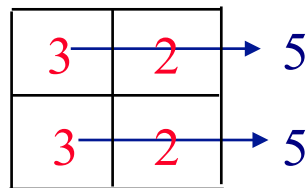


comparaison par soustraction

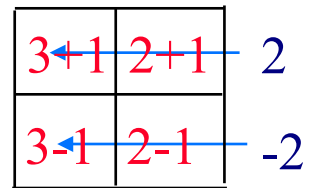


rétroprojection des différences

f0

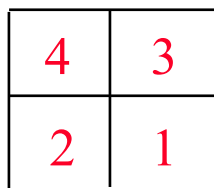


comparaison par soustraction



rétroprojection des différences

f1

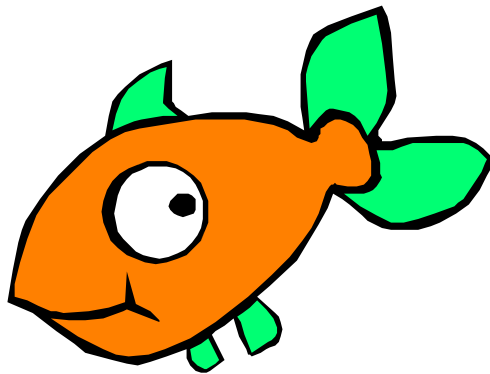


f2

# Méthode statistique : MLEM

---

- MLEM = Maximum Likelihood Expectation Maximization
- Utilise une formulation probabiliste du problème de reconstruction : suppose que les données mesurées (sinogrammes ou projections) obéissent à une statistique de Poisson



Avantage : modélise explicitement le bruit dans les données



**Ceci implique que si on modifie les projections avant la reconstruction, il se peut que MLEM ne soit plus adapté théoriquement**



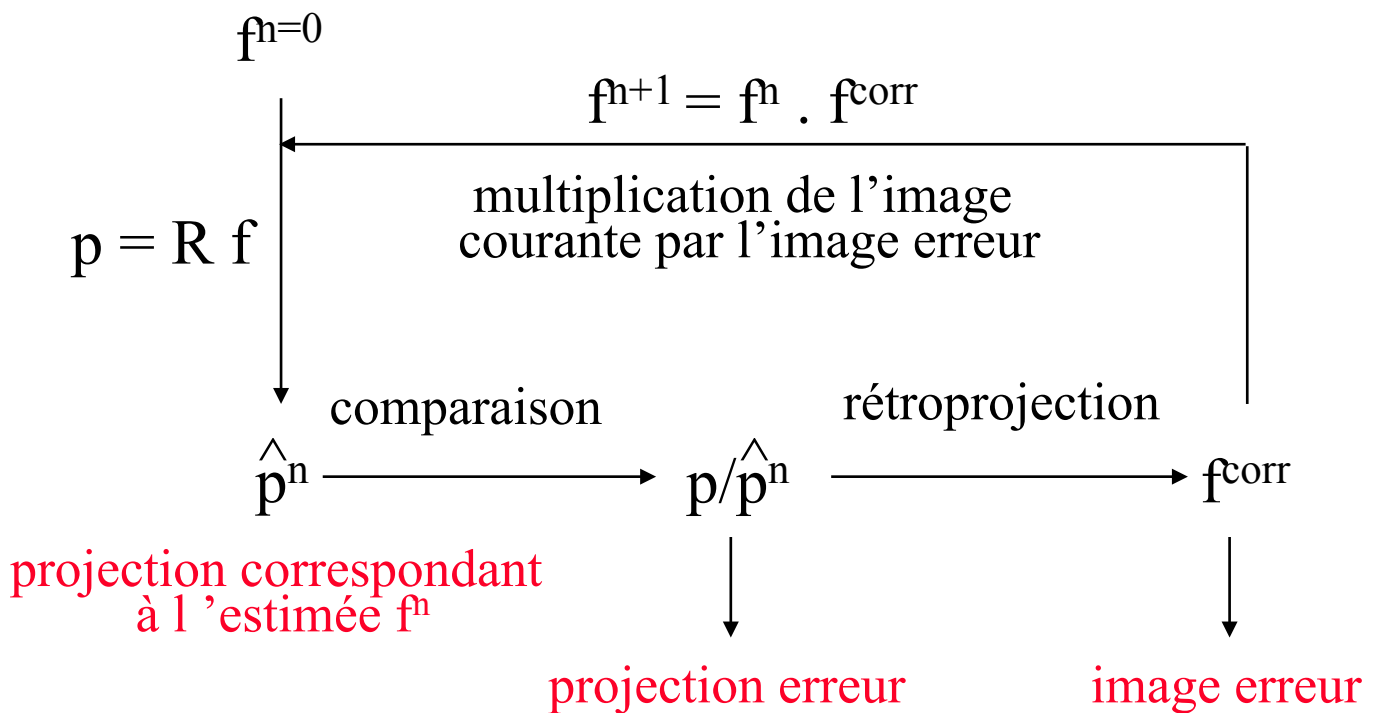
# Algorithme MLEM

---

- Formule de mise à jour :

$$f^{n+1} = f^n \cdot R^t [ p / p^n ]$$

estimée initiale de  
l'objet à reconstruire



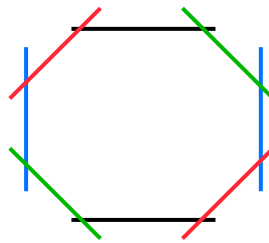
- \* solution toujours positive ou nulle
- \* convergence lente
- \* méthode itérative la plus utilisée en SPECT (dans sa version accélérée OSEM)

# Version accélérée de MLEM : OSEM

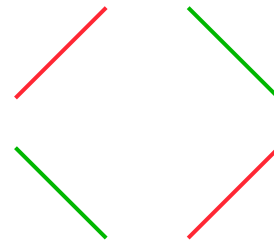
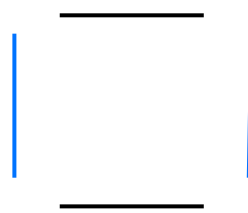
---

- OSEM = Ordered Subset Expectation Maximisation
- Tri des P projections en sous-ensembles ordonnés

Exemple :

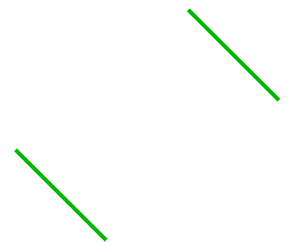


8 projections



2 sous-ensembles de 4 projections

ou



4 sous-ensembles de 2 projections

# Version accélérée de MLEM : OSEM

---

- Application de MLEM sur les sous-ensembles :

- itération 1 :

estimation de  $f^1$  à partir de l'initialisation  $f^0$  et des projections  $p^1$  correspondant au sous-ensemble 1

$$f^1 = f^0 \cdot R^t [ p / p^1 ]$$

estimation de  $f'^1$  à partir de  $f^1$  et des projections  $p'^1$  correspondant au sous-ensemble 2

$$f'^1 = f^1 \cdot R^t [ p / p'^1 ]$$

- itération 2 :

estimation de  $f^2$  à partir de  $f'^1$  et des projections  $p^2$  correspondant au sous-ensemble 1

$$f^2 = f'^1 \cdot R^t [ p / p^2 ]$$

estimation de  $f'^2$  à partir de  $f^2$  et des projections  $p'^2$  correspondant au sous-ensemble 2

$$f'^2 = f^2 \cdot R^t [ p / p'^2 ]$$

etc.

**OSEM avec S sous-ensembles et I iterations**

**⇔ SI itérations de MLEM**

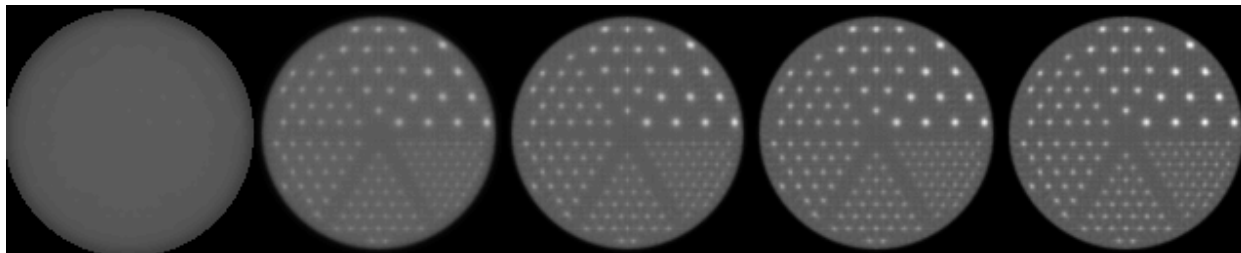
**mais S fois plus rapide !!!**

# Caractéristiques de OSEM

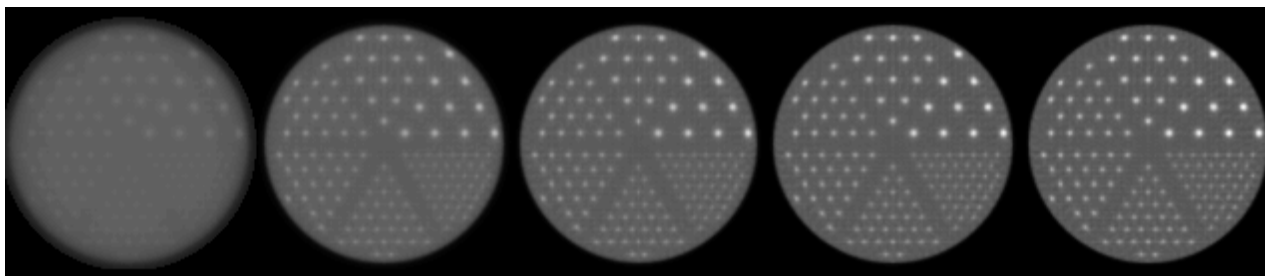
---



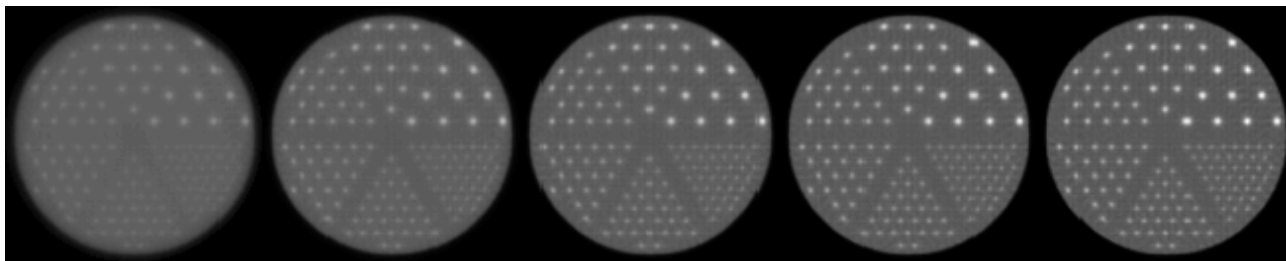
MLEM 1                      16                      24                      32                      40 itér.



OSEM 1                      4                      6                      8                      10 itér.  
4 ss-ens.



OSEM 1                      2                      3                      4                      5  
8 ss-ens.



**Spécifier un nombre d'itérations OSEM sans nombre de sous-ensembles n'a pas de sens !**

## Autres algorithmes itératifs

---

- RAMLA (row action maximum likelihood algorithm) est un cas particulier de OSEM dans lequel le nombre de sous-ensemble est égal au nombre de projections



- RAMLA nécessite un paramètre de régularisation (relaxation) pour le contrôle du bruit
  
- DRAMA, SAGE, SMART, Gradient Conjugué, ...

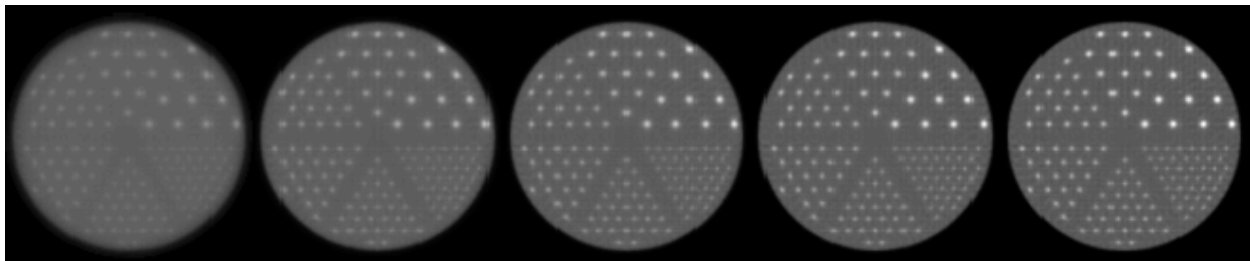
# Caractéristiques des méthodes itératives

---

- Plus élevé est le nombre d'itérations, meilleure est la restitution des hautes fréquences



OSEM 1 2 3 4 5  
8 ss-ens.



- Problème du choix du nombre d'itérations
  - convergence vers la solution puis divergence de la procédure lors de la reconstruction des très hautes fréquences du fait de la présence de bruit (haute fréquence)

➔ nécessité de « régulariser »

- La vitesse de convergence dépend de l'objet reconstruit (différente pour un patient maigre et obèse)

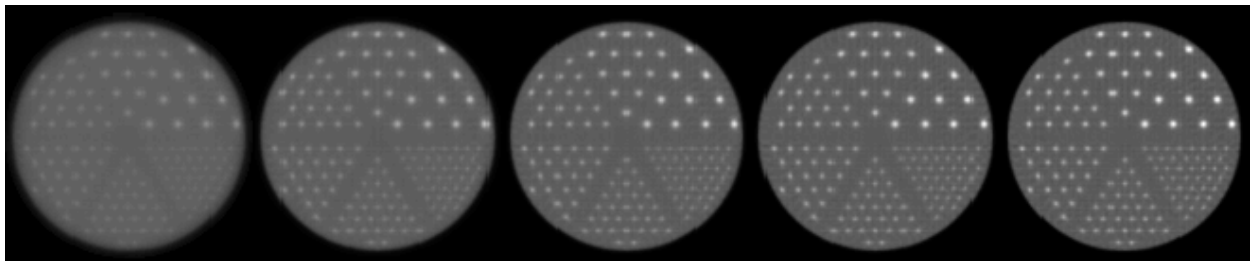
# Caractéristiques des méthodes itératives

---

- Le choix du nombre d'itérations conditionne le compromis résolution spatiale vs bruit



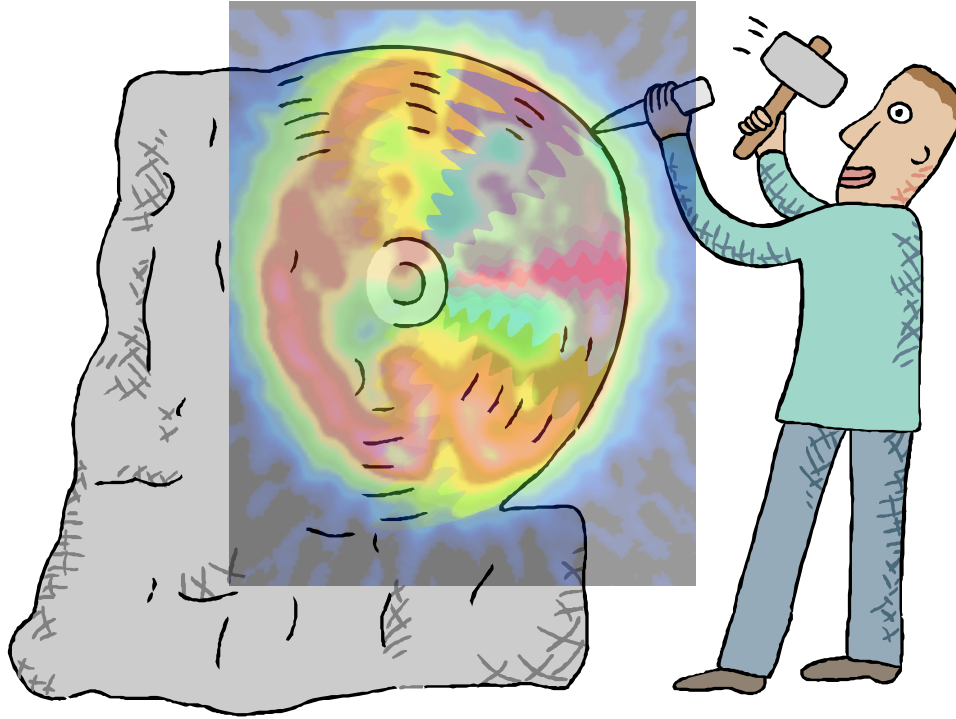
OSEM 1                      2                      3                      4                      5  
8 ss-ens.



- Le nombre d'itérations devrait être optimisé en fonction de la finalité des images (comme le filtre en reconstruction analytique)

# Régularisation

---



Faire tendre la solution vers ce à quoi on s'attend

- solution non régularisée :  
minimisation de  $d(p, Rf)$

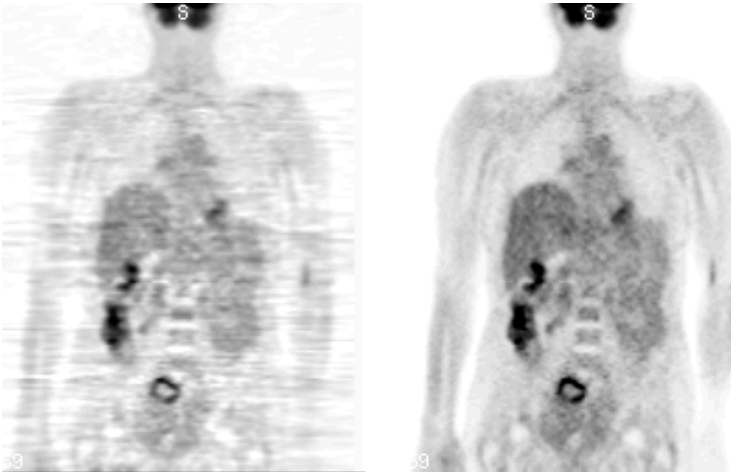
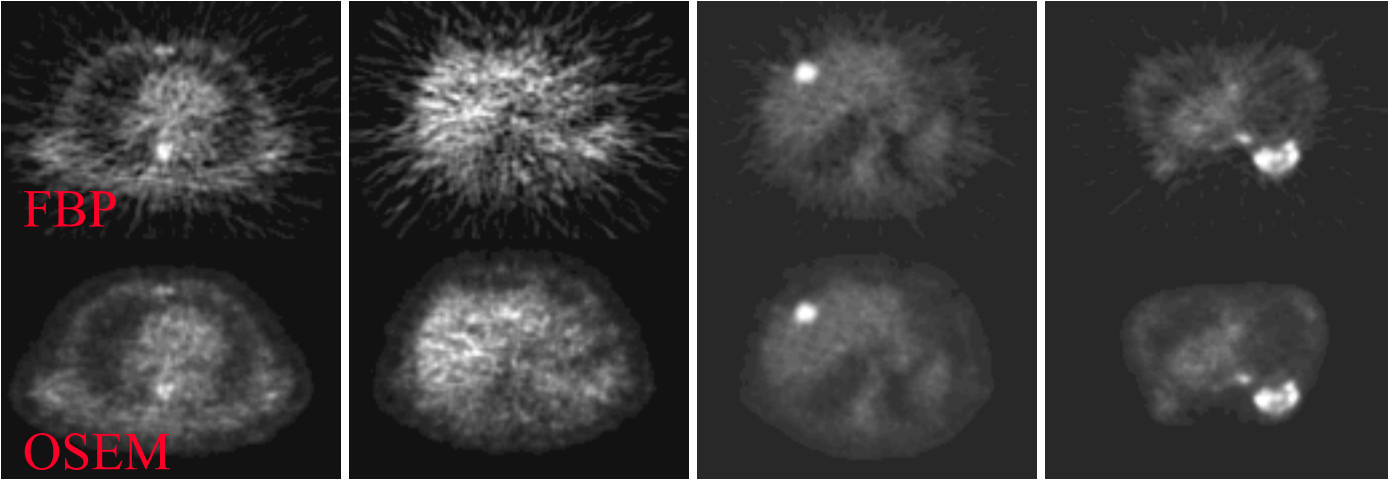


- solution régularisée :  
minimisation de  $d_1(p, Rf) + \lambda d_2(f, f_{\text{apriori}})$



# Reconstruction analytique ou itérative ? (1)

## Tomographie d'émission PET



# Reconstruction analytique ou itérative ?

---



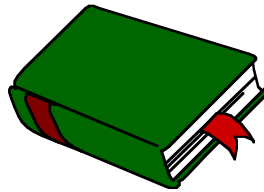
- Algorithmes itératifs par rapport à rétroprojection filtrée (FBP)
  - \* réduction des artefacts de raies
  - \* possible compensation des phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur)
  - \* possible modélisation des caractéristiques statistiques des données



- \* temps de calculs accrus

# Historique

---



- 1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”
  - ⇒ travaux confinés au cercle des mathématiciens
- 1956 : Bracewell : démonstration des relations entre transformée de Fourier et transformée de Radon
- 1963 : premières applications de la tomographie médicale
  - Kuhl, prof de radiologie : premières images tomographiques par rétroprojection simple
  - Cormack, physicien : application des travaux de Radon aux acquisitions par rayons X
- 1970 : publication de la première image de tomodensitométrie X
- 1970-73 : mise au point du premier scanner X par Cormack et Hounsfield
- 1979 : Attribution du prix Nobel de Médecine à Cormack et Hounsfield

# Quelle méthode pour quelle application ?

---

- Scanner X
  - \* rétroprojection filtrée car excellent rapport signal-sur-bruit
  
- Tomographie d'émission monophotonique
  - \* routine clinique : longtemps rétroprojection filtrée seulement
  - \* de plus en plus fréquemment : algorithmes itératifs, en particulier OSEM, du fait de :
    - la réduction des artefacts de raies
    - les plus grandes possibilités en terme de quantification
    - le traitement plus efficace de données présentant une faible statistique (10 000 moins d'événements qu'en scanner X)
    - l'augmentation de la puissance des calculateurs qui rend la mise en œuvre d'algorithmes itératifs compatible avec une utilisation clinique
  
- Tomographie d'émission de positons
  - \* rétroprojection filtrée, OSEM, RAMLA

## Pour en savoir plus ...

---

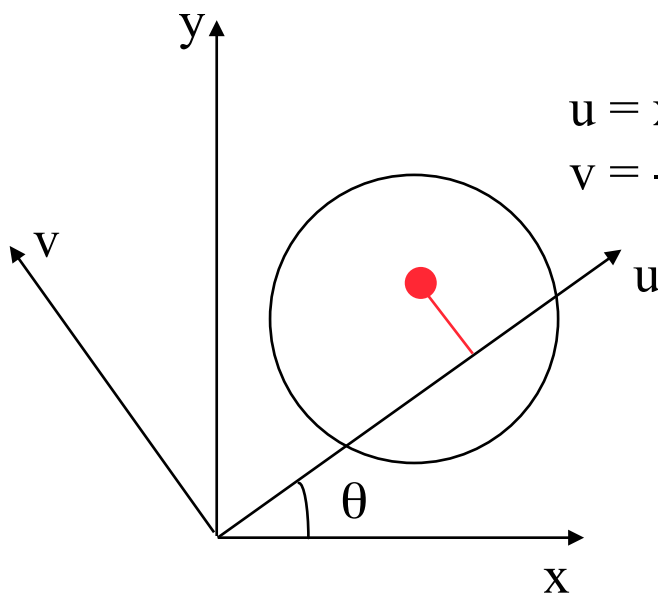
- Analytic and iterative reconstruction algorithms in SPECT. Journal of Nuclear Medicine 2002, 43:1343-1358
- Rétroprojection filtrée et reconstruction itérative : rappels théoriques et propriétés des deux approches sur :  
<http://www.guillemet.org/irene>
- Articles didactiques téléchargeables sur:  
<http://www.guillemet.org/irene/equipe4/cours.html>

# Annexes

---

# Théorème de la coupe centrale : démonstration

$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv \xrightarrow{\text{transformée de Fourier (TF)}} P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, \theta) e^{-i2\pi\rho u} du$$



$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$\rho_x = \rho \cos \theta$$

$$\rho_y = \rho \sin \theta$$

$$du \cdot dv = dx \cdot dy$$

changement de variable :  $(u, v) \longrightarrow (x, y)$

$$P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\rho u} du dv \stackrel{\downarrow}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} dx dy$$

TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à u  
 =  
 TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

# Rétroprojection filtrée : démonstration

$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y)$$

$$f(x,y) \stackrel{\text{TF}^{-1}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\rho_x, \rho_y) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

$$\stackrel{\text{TCC}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

changement de variable :  $(\rho_x, \rho_y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$$\downarrow \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho \cos \theta \\ \rho_y &= \rho \sin \theta \\ \rho &= (\rho_x^2 + \rho_y^2)^{1/2} \\ d\rho_x \cdot d\rho_y &= \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \\ u &= x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi p'(u, \theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑ projections filtrées

↑ filtre rampe

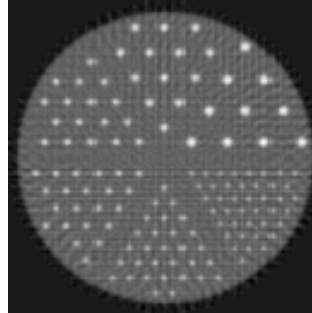
objet  $f(x,y)$  à reconstruire  
=  
rétroprojection des projections filtrées



# Filtres classiques : filtre de Hamming

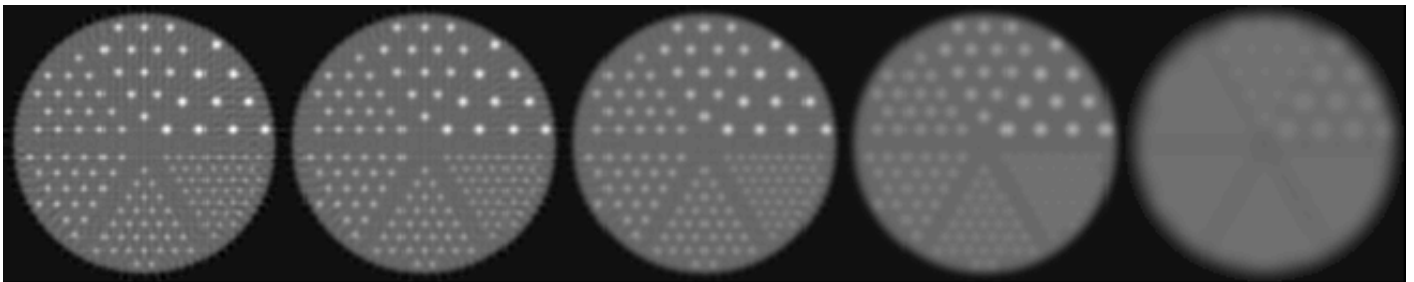
---

- Filtre rampe



- Filtre de Hamming

$$w(\rho) = 0,54 + 0,46(\cos\pi\rho/\rho_c) \quad \text{si } \rho < \rho_c$$
$$= 0 \quad \text{si } \rho \geq \rho_c$$



0,5

0,4

0,3

0,2

0,1

fréquence de coupure  $\rho_c$

➡ plus faible est la fréquence de coupure,  
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e.,  
plus fort est le lissage

# Implantations possibles du filtrage en FBP ...

---

- Multiplication du filtre rampe par une fenêtre d'apodisation

$$|\rho| \longrightarrow |\rho|w(\rho)$$

➔ filtrage 1D de la TF 1D des sinogrammes

- Filtrage des projections dans l'espace réel puis reconstruction avec un filtre rampe

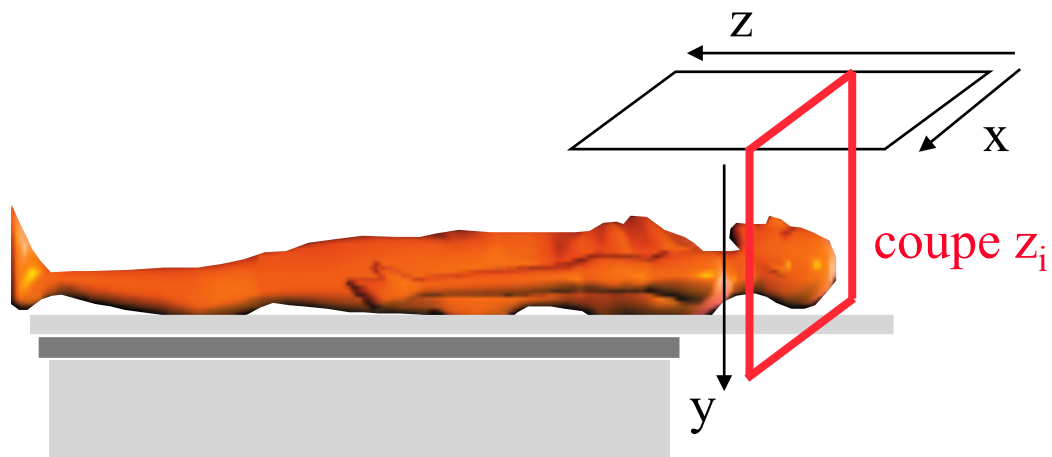
➔ filtrage 2D (directions x,z)

- Reconstruction des sinogrammes avec un filtre rampe puis filtrage 2D des coupes reconstruites

➔ filtrage 2D (directions x,y)

- Reconstruction avec un filtre rampe puis filtrage 3D du volume reconstruit

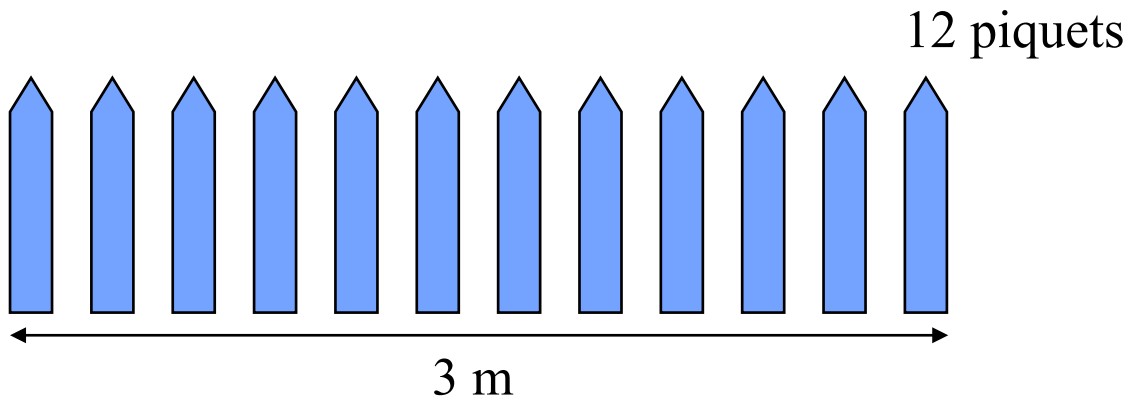
➔ filtrage 3D (directions x,y,z)



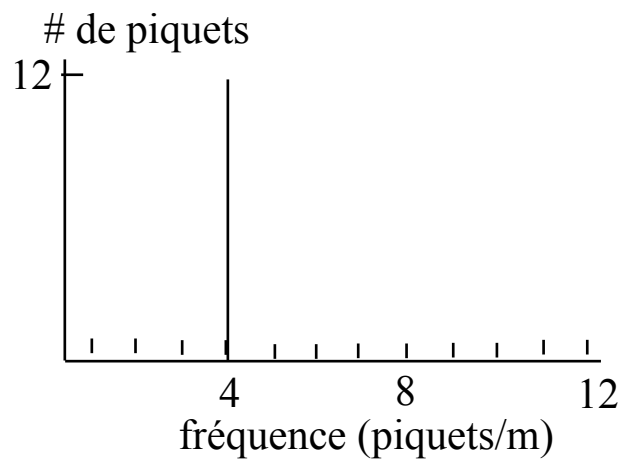
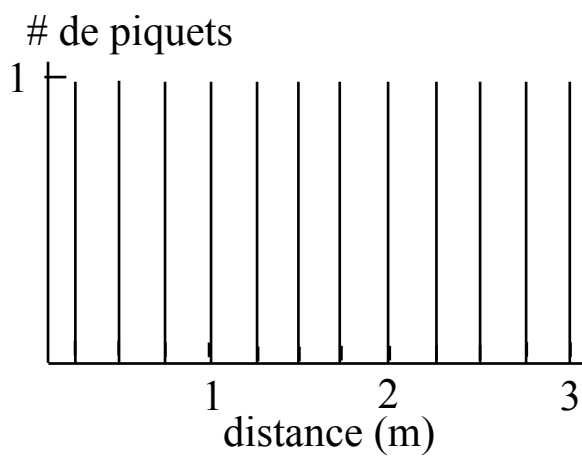
# Espace de Fourier : rappels

---

Tout signal a une représentation fréquentielle dans l'espace de Fourier

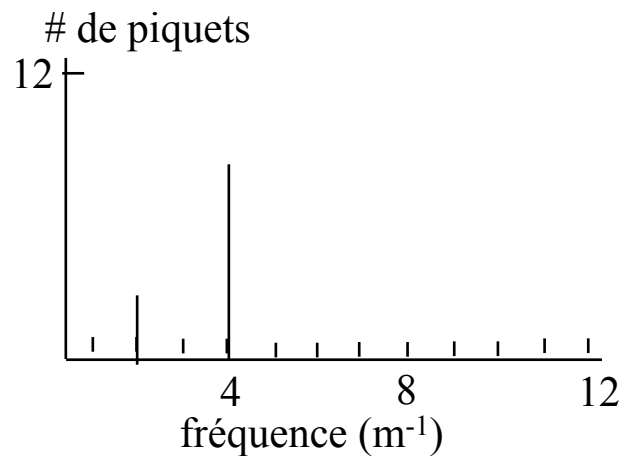
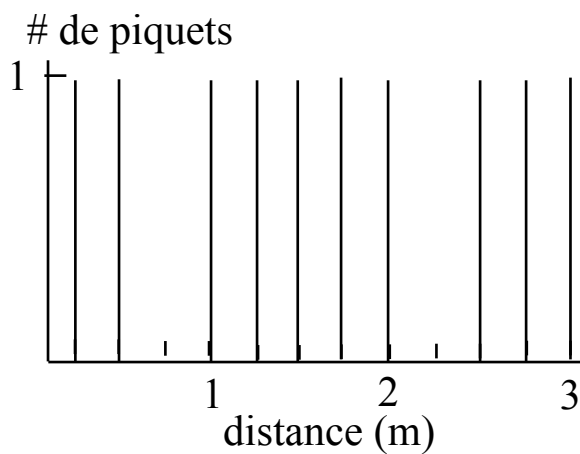
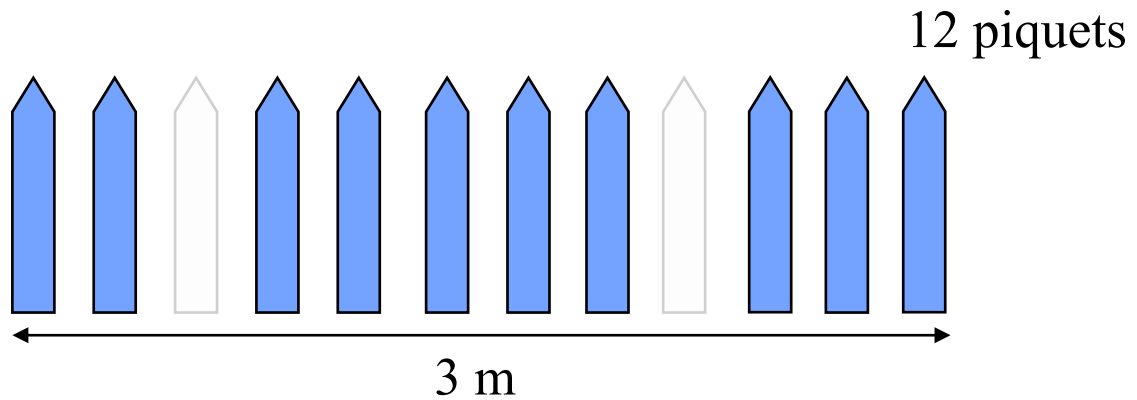


12 piquets sur 3 m  
ou 4 piquets par mètre



# Espace de Fourier : rappels

---



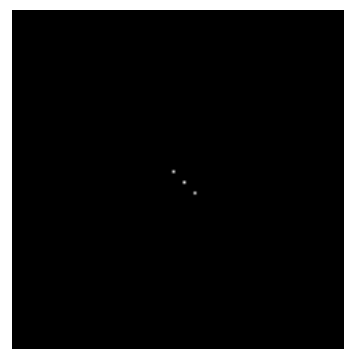
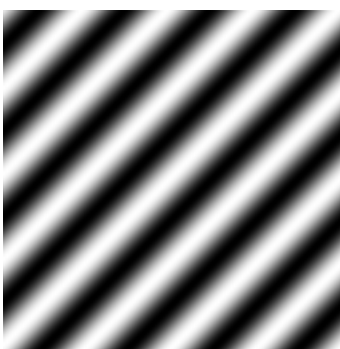
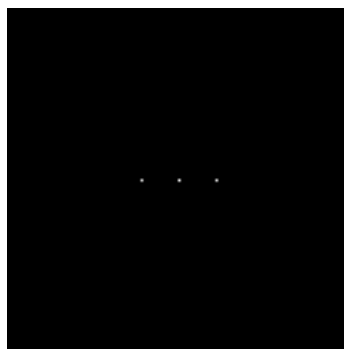
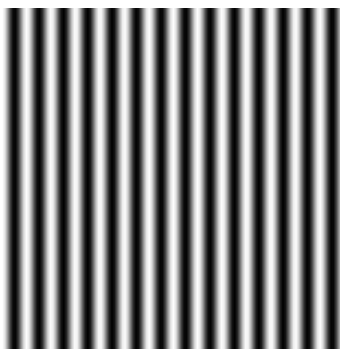
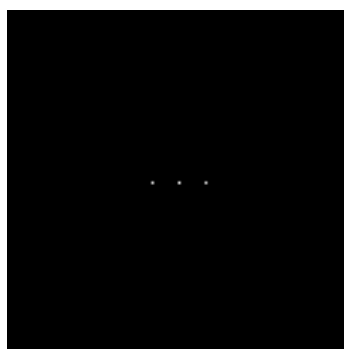
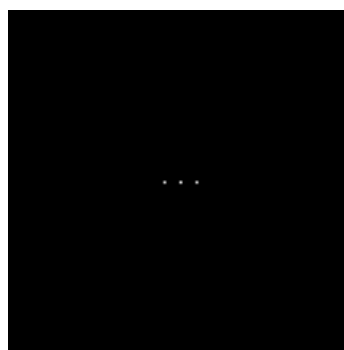
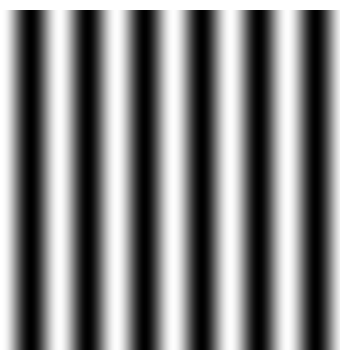
L'utilisation de cette représentation fréquentielle facilite souvent la manipulation du signal (filtrage, compression, etc)

# Espace de Fourier : représentation synthétique

---

image

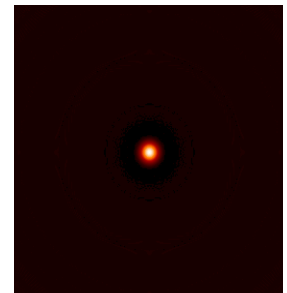
représentation de l'image  
dans l'espace de Fourier



# Principe d'un filtre spatial

Image originale

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	10	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0



Filtre

	0	1	0
1/6	1	2	1
	0	1	0

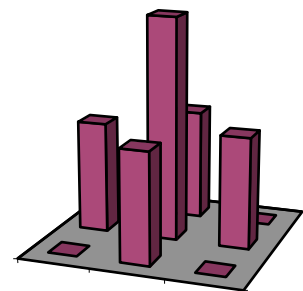


Image filtrée

0	0	0	0	0
0	0	1,7	0	0
0	1,7	3,3	1,7	0
0	0	1,7	0	0
0	0	0	0	0

